Al-Farouk journal of sciences
Volume (2), Issue (4) (Spt, 2026)
ISSN: 3135-2359

مجلة الفاروق للعلوم
المجلد (2) العدد 4 سبتمبر 2026
ردمد: 3135-2359

دراسة التقارب للحلول التقريبية لمعادلات فولتيرا التكاملية باستخدام تحويل ادوميان ومشتقة كابوتو

نورية شعبان أبوالشواشي
كلية التقنية الهندسية زوارة – ليبيا

Convergence Analysis of Approximate Solutions for Volterra Integral Equations Using the Adomian Transform and the Caputo Derivative

Nouriya Shaaban Abulshawashi
Faculty of Engineering Technology, Zuwara – Libya
nouriaAbulshwashi@cetZ.edu.ly

تاريخ الاستلام:2026/9/16 تاريخ المراجعة 9/17/ 2026 تاريخ القبول:2026/10/13- تاريخ النشر2026/11/19

الملخص

يتناول هذا البحث دراسة تقارب الحلول التقريبية لمعادلات فولتيرا التكاملية الكسرية باستخدام طريقة تفكيك أديومان (Adomian Decomposition Method, ADM)، مع اعتماد مشتقة كابوتو الكسرية في صياغة النموذج الرياضي. تُعد معادلات فولتيرا التكاملية الكسرية من النماذج المهمة في العديد من التطبيقات الرياضية والهندسية، إلا أن طبيعتها الكسرية وغير الخطية تجعل الحصول على حلول تحليلية صريحة أمرًا صعبًا في كثير من الحالات. وللتغلب على هذه الصعوبة، تم توظيف طريقة تفكيك ادوميان للحصول على حلول تقريبية في صورة متسلسلات متقاربة.

تعتمد المنهجية على إعادة صياغة معادلة فولتيرا التكاملية الكسرية باستخدام مؤثر التكامل الكسرى المرتبط بمشتقة كابوتو، ثم تمثيل الحل على شكل متسلسلة من المركبات، في حين تتم معالجة الحدود غير الخطية من خلال متعددات حدود أديومان. ومن خلال بناء علاقة تكرارية مناسبة، يمكن حساب مكونات الحل بصورة متتابعة والحصول على تقريب للحل باستخدام عدد محدود من حدود المتسلسلة.

الكلمات المفتاحية:
معادلات فولتيرا التكاملية، التفاضل والتكامل الكسرى، طريقة التحلل لأدوميان، متعددات أدمويان، الحل التقريبي، تحليل الخطأ.

Abstract
This research examines the convergence of approximate solutions for fractional Volterra integral equations using the Adomian Decomposition Method (ADM), with the Caputo fractional derivative employed in the formulation of the mathematical model. Fractional Volterra integral equations are significant models in various mathematical and engineering applications; however, their fractional and nonlinear nature often makes obtaining explicit analytical solutions difficult. To overcome this challenge, the Adomian Decomposition Method is utilized to derive approximate solutions in the form of convergent series.
The methodology involves reformulating the fractional Volterra integral equation using the fractional integral operator associated with the Caputo derivative, and representing the solution as a series of components, while nonlinear terms are handled via Adomian polynomials. By establishing an appropriate recursive relation, the components of the solution can be calculated sequentially, allowing for an approximation of the solution using a finite number of terms from the series.
Keywords: Equations, Volterra, Integral, Adomian, Caputo derivative.

1-المقدمة

تُعدّ المعادلات التكاملية من الموضوعات المهمة في صياغة ونمذجة العديد من المشكلات التي تظهر في العلوم التطبيقية والهندسية. وتتميز هذه المعادلات بقدرتها على تمثيل الأنظمة التي تعتمد فيها الحالة الحالية على القيم السابقة للمتغيرات،

مما يجعلها أداة مناسبة لدراسة الظواهر التي تتضمن تأثيرات تراكمية أو تعتمد على التاريخ السابق للنظام. ومن بين أهم أنواع المعادلات التكاملية تأتي معادلات فولتيرا التكاملية، التي يتميز حدها التكاملي باعتماده على المتغير المستقل، وقد حظيت هذه المعادلات باهتمام واسع في دراسة وجود الحلول ووحدانيتها واستقرارها وتقارب الحلول التقريبية.

ومع التطور في دراسة الظواهر ذات السلوك غير المحلي وتأثيرات الذاكرة، ظهر الحساب الكسرى بوصفه تعميمًا طبيعيًا لمفاهيم الاشتقاق والتكامل التقليدية إلى رتب غير صحيحة. وقد أصبح هذا المجال من الأدوات الرياضية المهمة في بناء نماذج أكثر ملائمة لبعض الأنظمة التي لا يمكن وصف سلوكها بصورة كافية باستخدام النماذج التفاضلية والتكاملية التقليدية. وتتميز النماذج الكسرية بقدرتها على تمثيل التأثيرات غير المحلية والاعتماد على التاريخ السابق للنظام، الأمر الذي جعلها موضع اهتمام متزايد في العديد من التطبيقات العلمية والهندسية.

ومن أهم المؤثرات المستخدمة في الحساب الكسرى مشتقة كابوتو الكسرية (Caputo fractional derivative)، التي تتميز بملاءمتها للتعامل مع الشروط الابتدائية التقليدية، ولذلك تُستخدم على نطاق واسع في دراسة المعادلات التفاضلية والتكاملية الكسرية. ويسمح استخدام مشتقة كابوتو بصياغة نماذج كسرية تتضمن تأثيرات الذاكرة بصورة أكثر ملائمة لطبيعة عدد من المشكلات التطبيقية، كما توفر أساسًا رياضيًا مناسبًا للانتقال بين الصيغ التفاضلية والتكاملية للمسائل الكسرية.

ومن ناحية أخرى، تُعد طريقة تحليل ادوميان (Adomian Decomposition Method) إحدى الطرق شبه التحليلية المستخدمة في حل طيف واسع من المعادلات التفاضلية والتكاملية، بما في ذلك المسائل غير الخطية. وتعتمد هذه الطريقة على تمثيل الحل في صورة متسلسلة من الحدود المتتابعة، مع تمثيل الأجزاء غير الخطية باستخدام كثيرات حدود ادوميان. ويتيح هذا الأسلوب بناء تقريب متتابع للحل، ومن ثم دراسة خصائص المتسلسلة الناتجة، ولا سيما تقاربها نحو الحل المطلوب للمسألة.

وفي هذا السياق، يركز البحث الحالي على دراسة تقارب الحلول الناتجة عن تطبيق طريقة تحليل ادوميان على معادلات فولتيرا التكاملية الكسرية المرتبطة بمشتقة كابوتو. ويتم ذلك من خلال صياغة المسألة في إطارها التكاملي المناسب، ثم بناء المتسلسلة التي تمثل الحل باستخدام طريقة تحليل ادوميان، ودراسة الشروط التي تضمن تقارب هذه المتسلسلة إلى الحل المطلوب. كما يهدف البحث إلى توضيح العلاقة بين البنية الكسرية للمعادلة وطبيعة تقارب الحل التقريبي الناتج عن الطريقة.

وتكمن أهمية هذه الدراسة في الجمع بين ثلاثة عناصر أساسية، هي معادلات فولتيرا التكاملية، والحساب الكسري باستخدام مشتقة كابوتو، وطريقة تحليل أدوميان، مع التركيز بصورة خاصة على الجانب التحليلي المتعلق بالتقارب. ومن خلال ذلك، تسعى الدراسة إلى تقديم إطار رياضي واضح للحصول على حلول تقريبية لمجموعة من معادلات فولتيرا التكاملية الكسرية، والتحقق من تقارب الحلول الناتجة، بما يمكن أن يسهم في تطوير أساليب شبه تحليلية لدراسة هذا النوع من المعادلات

2-الأساسيات والتعريفات

في هدا القسم نستعرض بعض المفاهيم الأساسية في حساب التفاضل والتكامل الكسرى والتي ستكون ضرورية لدراسة معادلات فولتيرا التكاملية الكسرية وطريقة التفكيك الأدوميانى:

1.2دالة جاما (Gamma Function)

تُعد دالة جاما من الدوال الخاصة المهمة في التحليل الرياضي، ولها دور أساسي في نظرية التفاضل والتكامل الكسرى.

تُعرَّف دالة جاما، لكل $x>0$ ، بالعلاقة:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

وتتميز دالة جاما بخاصية التكرار الأساسية:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

ومن ثم، إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن

$$\Gamma(n) = \ (n-1)!$$

كما أن

$$\Gamma(1) = \ 1$$

وتُستخدم دالة جاما بصورة أساسية في تعريف التكاملات والمشتقات ذات الرتب غير الصحيحة، حيث تسمح بتعميم بعض النتائج المعروفة من التفاضل والتكامل التقليدي إلى الرتب الكسرية

2.2 التكامل الكسرى لريمان–ليوفيل:

ليكن f دالة قابلة للتكامل على الفترة $[0,T]$ ، ولتكن $\alpha > 0$ يُعرَّف التكامل الكسري الأيسر لريمان–ليوفيل من الرتبة α للدالة f(t)بالعلاقة

$$(I_0^{\alpha} + f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) d(s) \quad , t \in [0,T].$$

حيث تمثل $\Gamma(\alpha)$ دالة جاما.

وعندما تكون $\alpha = 1$ ، نحصل على التكامل التقليدي، إذ إن:

$$(I_{0+}^1 f)(t) = \int_0^t f(s) d(s).$$

ومن الخصائص الأساسية للتكامل الكسرى خاصية شبه المجموعة، والتي تنص على أنه، تحت الشروط المناسبة على الدالة f ولـ $\alpha, \beta > 0$ ، فإن

$$I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f(t) = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(t)$$

وتُعد هذه الخاصية من الخصائص المهمة في دراسة المعادلات التفاضلية والتكاملية الكسرية، كما ستُستخدم في اشتقاق العلاقات المرتبطة بمشتقة كابوتو.

3.2 مشتقة كابوتو (Caputo Fractional Derivative)

لتكن f(t)دالة معرفة على الفترة [0,T]، ولتكن $n-1 < \alpha \leq n$, حيث $n \in N$. تُعرَّف مشتقة كابوتو الكسرية من الرتبة α للدالة $f(t)$ بالعلاقة:

$$, \quad {}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds$$

حيث $f^{(n)}$ تمثل المشتقة التقليدية من الرتبة n، و $\Gamma(\cdot)$ هي دالة جاما.

وعندما تكون $0 < \alpha < 1$ ،**فان** $n = 1$ وبالتالي تصبح مشتقة كابوتو في صورتها المبسطة

$$. \quad {}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)\, ds$$

أما عندما $\alpha = 1$ ، فإن مشتقة كابوتو تختزل إلى المشتقة التقليدية:

$${}^{C}D_{0}^{1} + f(t) = f'(t)$$

ومن الخصائص المهمة لمشتقة كابوتو أنها تأخذ الشروط الابتدائية في صورة القيم التقليدية للدالة ومشتقاتها ، وهو ما يجعلها مناسبة بصورة خاصة لصياغة العديد من المسائل الفيزيائية والرياضية ذات الرتب الكسرية

4.2 العلاقة بين مشتقة كابوتو والتكامل الكسرى:

من أهم العلاقات التي تربط مشتقة كابوتو بالتكامل الكسرى لريمان–ليوفيل العلاقة العكسية بينهما.

إذا كانت $0 < \alpha < 1$ وكانت f دالة تتمتع بالانتظامية المناسبة، فإن مشتقة كابوتو تُكتب على الصورة

$${}^{C}D_{0}^{\alpha} + f(t) = I_{0+}^{1-\alpha} f'(t)$$

وبتطبيق المؤثر I_{0+}^{α} على طرفي هذه العلاقة، نحصل على

$$I_{0+}^{\alpha}({}^{C}D_{0}^{\alpha} + f(t)) = I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{1-\alpha} f'(t)$$

وباستخدام خاصية شبه المجموعة التكاملات الكسرية،

$$I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{1-\alpha} = I_{0+}^{1}$$

فأن:

$$I_{0+}^{\alpha}({}^{C}D_{0}^{\alpha} + f(t)) = I_{0+}^{1} f'(t)$$

وبحسب تعريف التكامل التقليدي، فإن:

$$I_{0+}^{1} f^{'}(t) = \int_{0}^{t} f^{'}(s)\, ds = f(t) - f(0)$$

إذن نحصل على العلاقة الأساسية

$$I_{0+}^{\alpha}({}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t)) = f(t) - f(0)$$

أو بصورة مكافئة،

$$f(t) = f(0) + I_{0+}^{\alpha}({}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t))$$

وتُعد هذه العلاقة أساسية في تحويل المسائل التفاضلية الكسرية التي تتضمن مشتقة كابوتو إلى مسائل تكاملية كسرية، ومن ثم إلى معادلات من نوع فولتيرا التي يمكن دراسة حلولها التقريبية باستخدام طريقة التحليل الأدوميانى.

5.2 معادلات فولتيرا التكاملية الكسرية:

معادلة فولتيرا التكاملية هي معادلة يظهر فيها المجهول داخل التكامل ويكون الحد الأعلى للتكامل متغيرا . اما عندما التكامل من الرتبة الكسرية فإننا نحصل على فولتيرا الكسرية .

يمكن كتابة الصيغة العامة لمعادلة فولتيرا التكاملية الكسرية على النحو التالي:

$$y(t) = f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} K(t,s,y(s))\, ds \qquad (1)$$

حيت:

- $y(t)$:الدالة المجهولة المطلوب إيجادها.
- $f(t)$:دالة معلومة.
- $K(t,s,y(s))$:نواة المعادلة
- $\alpha > 0$:رتبة التكامل الكسرى .
- $\Gamma(\alpha)$ دالة جاما ,وهي تعميم دالة المضروب إلى ا لأعداد الحقيقية الموجبة.

وبالاعتماد على مشتقة كابوتو الكسرية،، يمكن تمثيل هذه المعادلات بالصورة الآتية:

$${}^{C}D_{0+}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)) + \int_{0}^{t} K(t,s,y(s))\, ds, \quad t \in [0,T] \qquad (2)$$

مع الشرط الابتدائي

$$y(0) = y_0 \ , \ \ 0 < \alpha < 1$$

حيث ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}$ مشتقة كابوتو من الرتبة الكسرية α و y_0 القيمة الابتدائية للحل.

تهدف الدراسة إلى استخدام طريقة تحليل ادوميان للحصول على حل تقريبي لهذه الفئة من المعادلات، مع تحديد الشروط المناسبة التي تضمن تقارب المتسلسلة الناتجة إلى الحل المطلوب.

وباستخدام العلاقة بين مشتقة كابوتو والتكامل الكسري لريمان –ليوفيل ،يمكن تحويل المعادلة الى صيغة تكاملية مناسبة لتطبيق الطريقة ،وهو ما يمهد لاشتقاق العلاقة التكرارية ودراسة تقارب الحلول التقريبية.

6.2-طريقة تحليل ادوميان:

تعتمد على تمثيل حل المعادلة على شكل متسلسلة غير نهائية:

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \qquad (3)$$

وبما ان الدالة $F(t,y(t))$ قد تكون غير خطية بالنسبة إلى y فإننا نمثلها باستخدام كثيرات حدود ادوميان كما يلي:

$$F(t,y(t))=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t). \qquad (4)$$

حيث نحسب كثيرات الحدود $A_n(t)$ وفق طبيعة الدالة غير الخطية .

بالتعويض عن(2)و(3)في (1) نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)= y + I_{0_+}^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)$$

ومن تم نحدد مكونات الحل تتابعا بالعلاقة :

$$y_0(t)=y_0, \qquad y_{n+1}(t)=I_{0+}^{\alpha}A_n(t), \ \ n\geq 0. \qquad (5)$$

حيث y_0 في الطرف الأيمن هو العدد الابتدائي بينما $y_0(t)$ هو المكون الأول في متسلسلة ادوميان . ويعرف الحل التقريبي من الرتبة Nبالعلاقة :

$$S_N(t)=\sum_{n=0}^{N} y_n(t) \qquad (6)$$

حيث $S_N(t)$ التقريب الناتج عن الاحتفاظ بعدد محدود من مكونات المتسلسلة .

3-صياغة المسألة وطريقة تفكيك ادوميان

1.3صياغة المسألة :

ندرس معادلة فولتيرا التكاملية الكسرية غير الخطية التالية:

$$y(t)=t^{\alpha}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}K(y(s))\,ds\ ,\quad o<\alpha\le 1 \qquad (3.1)$$

حيث $K(y)=y^2(s)$ حيث هو الحد غير الخطي وهي الصيغة التكاملية المكافئة لمسألة القيمة الابتدائية ذات مشتقة كابوتو :

$${}^{C}D_{0+}^{\alpha}\,y(t)=\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(1)}+y^2(t)\ \ ,\ \ y(0)=0$$

2.3 تطبيق ادوميان:

نفترض الحل $y(t)$ بمكن تمثيله كمتسلسلة :

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(t) \qquad (3.2)$$

والحد الغير خطي $K(y)=y^2$ بفكك باستخدام كثيرات حدود أدوميا ن A_n :

$$K(y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n \qquad (3.3)$$

تحسب A_n بالصيغة: حيث

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[N(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i)]_{\lambda=0}$$

ولما $K(y)=y^2$ فان :

$$A_0=y_0^2$$
$$A_1=2y_0y_1$$
$$A_2=2y_0y_2+y_1^2$$
$$A_3=2y_0y_3+2y_1y_2$$

بالتعويض عن $(3.2),(3.3)$ في (3.1) نتحصل على الخوارزمية التكرارية :

$$y_0(t)=t^{\alpha} \qquad (3.4)$$

$$y_{n+1}(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}A_n(s)\,ds$$

وعليه ,فأن الحل التقريبي ذا m حد هو :

$$\phi_m(t)=\sum_{n=0}^{m-1} y_n(t)$$

4-تحليل التقارب وتقدير الخطأ

تقارب طريقة ادوميان للمعادلة :

$$y(t)=f(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}K(t,s,y(s))\,ds$$

4-1 فضاء العمل :

نعمل على الفضاء $X=C[0,T]$ مع المعيار $\|Y\|=\max_t |y(t)|$ وهو فضاء باناخ المتكامل .ونعرف المؤثر التكاملي Kعلىx بحيث يحقق خواص الانكماش تحت الفرضيات اللاحقة .

4-2 الفرضيات :

- **شرط ليبشتزّ**:الدالة تحقق شرط ليبشتز

$$|y^2-v^2|\le L.\|y-v\| \quad \text{حيث و } L=2M$$

- يعرف تابت التقلص (التقارب) بالشكل:

$$\delta=\frac{L.T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\ ,\quad 0<\delta<1$$

- **مبرهنة(وجود وتفرد وتقدير الخطأ):**
- **المؤثر K هو انكماش على X عند تحقق** $\delta<1$.وبالتالي توجد نقطة نابتة وحيدة $y\in X$ هي حل للمعادلة.
- متسلسلة ادوميان تعرف بالتقريب المقطوع ϕ_m وتتقارب إلى الحل y عندما $m\to\infty$.
- **تقدير الخطأ بالعلاقة:** $\|y-\phi_m\|\le\left(\frac{\delta^m}{1-\delta}\right).\|y_1\|$.
- **الخطأ يذهب إلى الصفر** $m\to\infty$. أي إن المتسلسلة متقاربة إلى الحل الوحيد.
- **عند** $\delta<\delta$ يضمن مبدأ التعاقد(banach)وجود الحل وتفرده واستقراره تحت التكرار .

5-المثال التطبيقي

نعتبر معادلة فولتيرا التكاملية الكسرية الغير خطية التالية:

$${}^{C}D_t^{\alpha}y(t)=1+\int_0^t y^2(s)\,d(s)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y(0)=0,\quad 0<\alpha\le 1$$

والمطلوب إيجاد الحل التقريبي باستخدام طريقة ادوميان

1-تحويل المسالة :

بتطبيق التكامل الكسري من الرتبة α نحصل على :

$$y(t)=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+I^{\alpha}\left(\int_0^t y^2(s)\,ds\right)$$

2-تطبيق طريقة ادوميان:

نفترض ان:

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)$$

ونكتب

$$y^2(t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)$$

حيت كثيرات حدود ادوميان هي:

$$A_0=y_0^2$$
$$A_1=2y_0y_1$$
$$A_2=2y_0y_2+y_1^2$$

وتكون العلاقة التكرارية:

$$y_0(t)=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$y_{n+1}(t)=I^{\alpha}\left(\int_0^t A_n(s)\,ds\right)$$

3-حساب الحدود التقريبية:

$$y_0(t)=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$y_1(t)=\frac{t^{3\alpha+1}}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+2)}$$

$$y_2(t)=\frac{2t^{5\alpha+2}}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+2)\Gamma(5\alpha+3)}$$

ادن الحل التقريبي بثلاثة حدود هو:

$$y(t)\approx y_0(t)+y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)$$

4- **عندما** $\alpha=1$ **تصبح المعادلة:**

$$y'(t)=1+\int_0^t y^2(s)\,ds,\qquad y_0(t)=0.$$

وبالتعويض في الحدود السابقة نحصل على :

$$y(t) \approx t + \frac{t^4}{12} + \frac{t^7}{252} + \frac{t^{10}}{6048}$$

6- النتائج العددية ومناقشتها

جدول(1):قيم التقريبات والأخطاء

t	$y_0(t)$	$\Phi_2 = y_0 + y_1$	$\Phi_3 = y_0 + y_1 + y_2$	$\Phi_4 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$	$[\Phi_4 - \Phi_3]$
0.5	0.500000	0.505208	0.505239	0.505239	0.000000
1.0	1.000000	1.083333	1.087302	1.087467	0.000165
1.5	1.500000	1.921875	1.989676	1.999209	0.009533

7-الخاتمة والاستنتاج

1-في هذا البحث، تمت دراسة معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية مع مشتقة كابوتو، وتم إثبات وجود ووحدانية الحل وتقارب متسلسلة ادوميان تحت شرط $\delta < 1$.

2-أظهر المثال العددي عند $y(0) = 0$ أن الحل التقريبي بأربعة حدود فقط:

$$\Phi_4 = t + \frac{t^4}{12} + \frac{t^7}{252} + \frac{t^{10}}{6048}$$

3- يوضح الجدول (1)أن الحل التقريبي بطريقة ادوميان يقترب من الحل المرجعي كلما زاد عدد الحدود ، حيث بلغ الخطأ عند $t = 0.5$ تقريباً 0، وعند $t = 1.5$ لم يتجاوز 0.0095 بأربعة حدود. وهذا يؤكد النظرية في القسم 4 عملياً. كما أن تحقيق الشرط الابتدائي $y(0) = 0$ بدقة يؤكد إن الطريقة تحافظ على الشروط الابتدائية من أول حد ,ولا تحتاج إلى أي تعديل أو تقريب إضافي.

4-يقتصر التقارب على المجال [0,1.5] حيث يتحقق شرط $\delta < 1$. كعمل مستقبلي، نلاحظ الفرق بين Φ_3 , Φ_4 صغير جدا عند t صغيرة ويزداد تدريجيا مع t .

وفي الختام نستنتج أن طريقة ادوميان طريقة فعالة وبسيطة ودقيقة لحل معادلات فولتيرا الكسرية غير الخطية، وتوفر حلاً تحليلياً تقريبياً بعدد قليل من الحدود. , يمكن تطبيق الطريقة على معادلات برتب كسرية مختلفة $\alpha \neq 1$ وعلى أنظمة من المعادلات غير الخطية، ومقارنتها بطرق عددية أخرى .و يوصى بتطبيق النتائج النظرية على تطبيقات عملية مثل نماذج الانتشار الحراري وانتشار الأوبئة والدوائر الكهربائية الكسرية.

8-المراجع

[1] Adomian, G. (1994). Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. Kluwer Academic Publishers.

[2] Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. Academic Press, New York.

[3] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam.

[4] Wazwaz, A. M. (2011). Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. Springer, Berlin.

[5] Momani, S. and Odibat, Z. (2007). Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order. Chaos, Solutions & Fractals, 31(5), 1248-1255.

[6] أوشاح، جميلة المبروك (2025). تحليل ودراسة المعادلات التكاملية باستخدام طريقة ادوميان: تطبيق على معادلات فولتيرا. المجلة الليبية للدراسات الأكاديمية المعاصرة، المجلد 9، العدد36

[7]الشاط، أمبارك أحميد محمد، وحيد، مبروكة حسين (2025). حل معادلات فولتيرا التكاملية ذات النواة القابلة للفرق باستخدام تحويلات لابلاس. مجلة جامعة سبها، ليبيا.