Al-Farouk journal of sciences
Volume (2), Issue (5) (Nov, 2026)
ISSN: 3135-2359

مجلة الفاروق للعلوم
المجلد (2) العدد 5 نوفمبر 2026
عدد خاص بالمؤتمر العلمي الرابع للعلوم والتقنية
28-29 نوفمبر 2026 مصراتة – ليبيا
إدارة المعاهد العليا – وزارة التعليم التقني

إيجاد تحويل لابلاس باستخدام دالة الخطوة الواحدية ودالة دلتا ديراك ودالة جاما

عبدالناصر علي الزعلوك

Evaluate Laplace transform by unit step function, Dirac delta function & Gamma function

Abdulnasser Ali Al-Zalook

Received: 29/7/2026 Revised: 20/8/2026 Accepted: 28/8/2026 Publication: 28/11/2026

الملخـــص

يلعب تحويل لابلاس دوراً هاماً في العديد من المجالات العلمية والتقنية مثل الهندسة الكهربائية وهندسة الاتصالات وميكانيكا الكم وغيرها...، ومن بين هذه التطبيقات المختلفة واهمها هو حل المعادلات التفاضلية الخطية العادية منها والجزئية وبشكل خاص مسائل القيم الابتدائية ، حيث أنه بواسطة تحويل لابلاس يمكننا اختزال المعادلة التفاضلية الى معادلة جبرية . والجدير بالذكر أن هناك العديد من الدوال التي لا يمكن إيجاد تحويل لابلاس لها مع أنها دوال مستمرة ، وهناك دوال مستمرة مقطعياً يكون من الصعوبة إيجاد تحويل لابلاس لها بالطرق العادية أي بإستخدام تعريف تحويل لابلاس الذي يشتمل على تكامل معتل أو خواصه ، وبإستخدامنا لفكرة *دالة جاما* التي تحتوي هي الأخرى في تعريفها على تكامل معتل وبمقارنته بتعريف تحويل لابلاس نحصل على تحويل لابلاس لبعض الدوال ، وبالنسبة لدالة الخطوة الواحدية لهايفيسايد فسنستعملها في التعبير عن بعض الدوال المستمرة مقطعياً ليسهل إيجاد تحويل لابلاس لها وكذلك الأمر بالنسبة *لدالة دلتا ديراك* .

الكلمات المفتاحية :/ تحويل لابلاس – مسائل القيم الابتدائية – المعادلات التفاضلية الخطية – دالة جاما

دالة الخطوة الواحدية لهيفيسايد – دالة دلتا ديراك

Abstract .

The concept of Laplace transforms plays a vital role in wide fields of science and technology Such as electric and communication engineering , Quantum Physics and solution of differential equations , ect. this paper provides the reader with a solid foundation in the fundamentals of Laplace transforms & gain on understanding of same of the very important and basic applications of this transforms. Laplace transform is broadly used to solve linear differential equations, particularly initial value problems. Laplace transform reduces a ordinary linear differential equation to an algebraic equation.

Keywords: Laplace transforms, Initial value problems, Linear differential equation, Gamma function - Heaviside Unit Step Function - Dirac Delta function

المقدمة

نهدف من خلال هذه الورقة البحثية تقديم افكاراً جديدة لإيجاد تحويل لابلاس لبعض الدوال ، وسيكون تركيزنا هنا على الدوال التي لطالما نتعرض لها في مجالات الهندسة الميكانيكية والكهربائية وهندسة الإتصالات والحاسوب ، وبالتالي سنتعرض في البداية الى دراسة تعريف تحويل لابلاس وشروط وجوده وخواصه وكيفية ايجاد تحويل لابلاس لبعض الدوال البسيطة ومن ثم نتعرف على دالة الخطوة الواحدية لهايفيسايد وطريقة التعبير عن بعض الدوال المستمرة مقطعياً بإستخدام هذه الدالة وإيجاد تحويل لابلاس لها. ولأهمية دالة دلتا ديراك وإستخداماتها في مجالات الهندسة الميكانيكية خاصةً سنتعرض لتعريفها وخواصها وعلاقتها بدالة الخطوة الواحدية لهايفيسايد وتحويل لابلاس لها . أما بخصوص تحويل لابلاس للدوال $f(t) = t^r$ حيث r دالة جاما فسنتعرض فقط لإستخدامها في إيجاد أي عدد حقيقي ، وسنختم بمبرهنة تعرض فكرة كتابة التي على الشكل

تحويل لابلاس للدالة على شكل متسلسلة دوال هندسية لانهائية يمكن استخدامها لحساب تحويل لابلاس كبديل لتعريف تحويل لابلاس أو خواصه ، ومبرهنة أخرى تعرف بصيغة مفكوك هايفيسايد التي تعرض فكرة لإيجاد تحويل لابلاس العكسي للدالة القياسية

(1)تعريف تحويل لابلاس

يعرف تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ حيث $t > 0$ كالتالي:

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \mathrm{F(s)} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \;\; ; s > 0$$

حيث أن المتغير s هنا هو متغير حقيقي (وبشكل عام لا مانع من اعتباره متغير مركب وفي هذه الحالة سنشترط أن $\mathrm{Re(s)} > 0$ لأن $e^{-[Re(s)+iIm(s)]t} = e^{-Re(s)t}[cos(Im(s))t + isin(Im(s))t]$.

فإذا كان هذا التكامل المعتل متقارب فإن تحويل لابلاس للدالة موجود وعدا ذلك لا .

تعريف (1-1) :/ [1] لتكن f دالة مستمرة مقطعياً على الفترة $[0\ \infty)$ ، فإن f تسمى *مرتبة أسياً* exponential order إذا كان وفقط إذا كان توجد ثوابت حقيقية $a, M, T > 0$ بحيث أن $|f(t)| \le Me^{at}$ لكل $t > T$.

وهذا يكافئ الشرط $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{at}} = 0$ وفي الحقيقة هذا هو الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس للدالة المستمرة مقطعياً f .

فالدوال $f(t) = t^n$ حيث n عدد طبيعي مرتبة أسياً لأن $\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{at}} = 0$ أو $|\frac{t^n}{e^{at}}| \le M$ لكل $a > 0$ ، وكذلك الدوال $f(t) = e^{kt}$ ، $f(t) = sin(kt)$ ، $f(t) = cos(kt)$ حيث k أي عدد حقيقي ، أما الدوال مثل الدالة $f(t) = e^{t^2}$ فهي ليست مرتبة أسياً لأن " $|\frac{e^{t^2}}{e^{at}}| = e^{(t-a)t} \to \infty$ as $t \to \infty$ " وأيضاً الدالة $f(t) = \frac{1}{t}$ وسيكون *تكامل لابلاس* المعتل لهذه الدوال متباعد وبالتالي فإن تحويل لابلاس لهاتان الدالتان غير موجود. مع العلم بأن الاستمرارية المتقطعة للدالة أو كونها مرتبة أسياً ليس شرطاً لازماً لوجود تحويل لابلاس لها ، فمثلاً الدالة $f(t) = t^{-½}$ ليست مستمرة مقطعياً على الفترة $[0\ , \infty)$ وتمتلك تحويل لابلاس ، والدالة $f(t) = 2te^{t^2} \cos(e^{t^2})$ ليست مرتبة أسياً وتمتلك تحويل لابلاس حيث سنناقش ذلك لاحقاً .

مبرهنة (1-2) :/ (وجود تحويل لابلاس للدالة) [1]

لتكن f دالة مستمرة مقطعياً على الفترة $[0, \infty)$ ومرتبة أسياً أي أن $|f(t)| \le Me^{at}$ فإن تحويل لابلاس لهذه الدالة $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ موجود لكل $s > a$ و أن $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

البرهان :/ بما أن $|f(t)| \le Me^{at}$ إذاً $|f(t)\, e^{-st}| \le Me^{at}e^{-st} = Me^{-(s-a)t} = g(t)$

الدالة $g(t) \ge 0$ وهي قابلة للتكامل حيث أن

$$\int_0^\infty g(t)\ dt = \frac{M}{s-a}$$

وكذلك نجد أن $|F(s)| \le \frac{M}{s-a}$ وبما أن $\lim_{s\to\infty} \frac{M}{s-a} = 0$ إذاً $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

" تذكير : استخدمنا مبرهنة تنص على أنه إذا كانت $|g(t)| \le |f(t)|$ فإن $|\int_0^\infty f(t)\,dt| \le |\int_0^\infty g(t)\ dx|$ "

طبعاً من خلال المبرهنة أعلاه سنجزم بأنه لا توجد دوال مستمرة مقطعياً ومرتبة أسياً وتمتلك تحويل لابلاس $F(s)$ لا يقترب من الصفر عندما s تقترب من ∞ ، فمثلاً الدالتان $F_1(s) = 1$ ، $F_2(s) = \frac{s}{s+1}$ لا يمكن أن يكونا تحويل لابلاس لدالة مستمرة مقطعياً ومرتبة أسياً ، مع أننا سنجد لاحقاً أنهما يشكلان تحويل لابلاس لصنف معين من الدوال.

مبرهنة (1-3) :/ [1] لأي دالتين f ، g

$$\mathcal{L}\{a\, f(t) + b\, g(t)\} = a\, \mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

حيث a ، b ثوابت اختيارية . أي أن تحويل لابلاس يعتبر مؤثر خطي *Linear operator* .

البرهان :/

$$\mathcal{L}\{a\, f(t) + bg(t)\} = \int_0^\infty [af(t) + bg(t)]\, e^{-st}dx$$
$$= a\int_0^\infty f(t)\ e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)\, e^{-st}\ dt$$
$$= a\, \mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}\ \blacksquare$$

والجدول التالي نبين فيه تحويل لابلاس لأهم الدول الأساسية وفي الطرف الايمن اهم خواصه والتي من السهل إثباتها باستخدام تعريف تحويل لابلاس :

$f(t)$	$F(s)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	
k ; k constant	$\frac{k}{s}$; $s > 0$	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$	*Shifting property*
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$; $s > k$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$; $n \in \aleph$	*s-differentiation rule*
$sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$; $s > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$; $a > 0$	*Change of scale property*
$cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$; $s > 0$	$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$; $t > a$	*Second shifting property*
t^n ; $n \in \aleph$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$; $s > 0$	$\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)\ du\} = \frac{1}{s}F(s)$; $s > 0$	*t-integral rule*

(2) دالة الخطوة الواحدية لهايفيسايد The Heaviside Unit Step Function

تعرف دالة الخطوة الواحدية لهايفيسايد بالشكل :

$$H(t-a) = \begin{cases} 0\ , & t < a \\ 1\ , & t > a \end{cases}$$

وبالتالي سنجد أن تحويل لابلاس لها هو

$$\text{ł}\{ H(t-a) \} = \int_0^\infty \mathrm{H}(t-a)\, e^{-st}\, dt = \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{e^{-as}} \quad ; \mathrm{s} > 0$$

$$\text{ł}\{ H(t) \} = \frac{1}{s} \; ; s > 0 \qquad \text{وأن}$$

$$\text{ł}\{ f(\mathrm{t}-a)\, H(\mathrm{t}-a) \} = \int_0^\infty f(\mathrm{t}-a) H(\mathrm{t}-a) e^{-st}\, dt = \int_a^\infty f(\mathrm{t}-a) e^{-s(t-a)} e^{-as}\, dt \quad \text{كذلك}$$

$$\text{ł}\{ f(\mathrm{t}-a)\, H(\mathrm{t}-a) \} = e^{-as} \int_0^\infty f(\mathrm{u}) e^{-su}\, du \qquad \text{نجد أن } u = t\text{-}a \text{ بوضع}$$

$$= e^{-as}\text{ł}\{f(\mathrm{u})\} = e^{-as}\mathrm{F(s)} \; ; \mathrm{s} > a \geq 0.$$

ويمكننا إعادة صياغة النتيجة أعلاه بالشكل : $\text{ł}\{ f(t-a) \} = e^{-as}\mathrm{F(s)}$ بشرط أن $t > a$

وقي الحقيقة إن دالة الوحدة لهايفيسايد مهمة جداً في التعامل مع الدوال المستمرة مقطعياً ، فعلى سبيل المثال :

الدالة
$$f(t) = \begin{cases} g(t), & t < a \\ 0, & t \geq a \end{cases}$$
$$= g(t)[\, 1 - H(t-a)] \, .$$

أما الدالة
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ j(t), & t \geq a \end{cases}$$
$$= j(t)\, H(t-a) \, .$$

وبالتالي الدالة
$$f(t) = \begin{cases} g(t), & t < a \\ j(t), & t \geq a \end{cases}$$
$$= \; g(t)[\, 1 - H(t-a)] \; + j(t)\, H(t-a) \, .$$

ومن التعبيرات المهمة هو التعبير عن الدالة التالية بواسطة دالة الوحدة لهايفسايد

$$f(\,t\,) = \begin{cases} 0 & : \; t < a \\ g(t) & : \; a < t < b \\ 0 & : \; t > b \end{cases} = g(t)[\, H(t-a) \; - \; H(t-b)] \, .$$

وبذلك يمكننا أن نقول بشكل عام أن أي دالة على الشكل :

$$f(\,t\,) = \begin{cases} 0 & : \; \mathrm{t} < t_0 \\ f_1(\,t\,) & : \; t_0 < \mathrm{t} < t_1 \\ f_2(\,t\,) & : \; t_1 < \mathrm{t} < t_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_n(\,t\,) & : \; t_{n-1} < \mathrm{t} < t_n \\ 0 & : \; \mathrm{t} > t_n \end{cases}$$

$$= f_1(\,t\,)\,[\,\mathrm{H}(t-t_0) - \mathrm{H}(t-t_1)] + f_2(\,t\,)\,[\,\mathrm{H}(t-t_1) - \mathrm{H}(t-t_2)] + \ldots + f_n(\,t\,)\,[\,\mathrm{H}(t-t_{n-1}) - \mathrm{H}(t-t_n)].$$

أما التي على الشكل

$$f(\,t\,) = \begin{cases} f_0(\,t\,) & : \; \mathrm{t} < t_0 \\ f_1(\,t\,) & : \; t_0 < \mathrm{t} < t_1 \\ f_2(\,t\,) & : \; t_1 < \mathrm{t} < t_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_n(\,t\,) & : \; t_{n-1} < \mathrm{t} < t_n \\ f_{n+1}(\,t\,) & : \; \mathrm{t} > t_n \end{cases}$$

$$= f_0(t)\,[1-\mathrm{H}(t-t_0)] + f_1(\,t\,)\,[\,\mathrm{H}(t-t_0) - \mathrm{H}(\mathrm{t}-t_1)] + \ldots + f_n(t)\,[\,\mathrm{H}(t-t_{n-1}) - \mathrm{H}(t-t_n)] + f_{n+1}(t)\,\mathrm{H}(t-t_n).$$

وبالتالي يكون من السهل ايجاد تحويل لابلاس لمثل هذه الدوال وخاصةً عندما حيث أن تكون $f(t) = e^{kt}$ أو $f(t) = t^n \; ; \; n \in \aleph$

$$\text{ł}\{f(t)\mathrm{H}(t-a)\} = \text{ł}\{t^n \mathrm{H}(t-a)\} = (-1)^n \mathrm{F}^{(n)}(\mathrm{s}) \; ; \; \mathrm{F(s)} = \text{ł}\{\mathrm{H}(t-a)\} = \frac{1}{s}\, e^{-as} \; ; \; \mathrm{s} > 0$$

$$, \; \text{ł}\{f(t)\mathrm{H}(t-a)\} = \text{ł}\{\, e^{kt}\mathrm{H}(t-a)\} = \mathrm{F}\,(\mathrm{s} - \mathrm{k}) \; ; \; \mathrm{F(s)} = \text{ł}\{\mathrm{H}(t-a)\} = \frac{1}{s}\, e^{-as} \; ; \; \mathrm{s} > 0$$

نستخدم المبرهنة التالية : وبالتالي $\mathrm{F(s-k)} = \frac{1}{s-k}\, e^{-a(s-k)}$. أما في حالة ما تكون الدالة $f(t)$ بخلاف هاتان الدالتان فيمكننا أن

<u>مبرهنة (2-1) :/ [2]</u>

$$\text{ł}\{f(t)\mathrm{H}(t-a)\} = e^{-as}\, \text{ł}\{f(t+a)\} \; ; \; \mathrm{s} > 0 \, .$$

البرهان:/

$$Ł\{f(t)\mathrm{H}(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{H}(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,.$$

$$Ł\{\,f(t)\,H(t-a)\,\} = \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u+a)\;du \qquad \text{نجد أن} \qquad u+a = t \;\text{بوضع}$$

$$= e^{-as}\int_0^\infty e^{-su} f(u+a)\;du = e^{-as}\,Ł\{f(u+a)\}\,;\, s>0\,.$$

فعلى سبيل المثال إذا كانت

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & t<\pi \\ sin(t)\,, & t>\pi \end{cases} = sin(t)\,\mathrm{H}(t-\pi)$$

فإن

$$Ł\{f(t)\} = Ł\{sin(t)\,\mathrm{H}(t-\pi)\} = e^{-\pi s}\,Ł\{sin(t+\pi)\} = e^{-\pi s}\,Ł\{-sin(t)\} = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\,.$$

(3) دالة دلتا ديراك *Dirac Delta function*

من الدوال التي لها تطبيقات كثيرة في نماذج الظواهر الفيزيائية *دالة الدفع الواحدية* *Impulse Unit function* المعرفة كالتالي :

$$\partial\varepsilon\,(t-a) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le t < a-\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & : \quad a-\varepsilon < t < a+\varepsilon \\ 0 & : \quad t \ge a+\varepsilon \end{cases}$$

حيث $a>0$, $\varepsilon>0$ والتي يمكن تعريفها أو التعبير عنها باستخدام دالة الوحدة لهايفيسايد كالتالي :

$$\partial\varepsilon\,(t-a) = \frac{1}{2\varepsilon}[\,H(t-a+\varepsilon) - H(t-a-\varepsilon)]$$

أما " الدالة " $\partial\,(t-a) = \lim_{\varepsilon\to 0}\partial\varepsilon\,(t-a) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}[\,H(t-a+\varepsilon) - H(t-a-\varepsilon)]$

مع أنها ليست دالة مطلقاً والتي تسمى مجازاً *دالة دلتا ديراك* حيث أن تعريفها سيكون هو :

$$\partial(t-a) = \begin{cases} \infty\,, & t=a \\ 0\,, & t\ne a \end{cases}$$

أو بشكل أفضل $\partial(t-a) \to \infty \quad \text{as} \quad t\to a \;\;\&\;\; \partial(t-a) = 0;\; t\ne a$

ومن هذا التعريف يمكن أن نستنتج الخواص المهمة التالية :

(1) $\int_0^\infty \partial\,(t-a)\;dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\partial\,(t-a)\;dt = 1;\; \varepsilon>0\,,\, a>0$

(2) $\int_0^\infty f(t)\,\partial\,(t-a)\,dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)\partial\,(t-a)\,dt = f(a)$ " shifting property".

(3) $\int_{-\infty}^{t}\partial\,(t-a)\,dt = \begin{cases} 0\,, & t<a \\ 1\,, & t>a \end{cases} = H(t-a)\;,\, a>0$ بشرط أن دالة مستمرة

(4) $\frac{d}{dt}\{H\,(t-a)\} = \partial(t-a)\,,\, a>0$

سندرس في المبرهنة التالية تحويل لابلاس لدالة دلتا ديراك :

مبرهنة (3-1) :/ [4]

$$Ł\{\partial\,(t-a)\} = e^{-as}\,,\; Ł\{\partial\,(t)\} = 1\,.$$

البرهان:/

$$Ł\{\partial\varepsilon\,(t-a)\} = Ł\left\{\frac{1}{2\varepsilon}[H(t-(a-\varepsilon)) - H(t-(a+\varepsilon))]\right\} = \frac{1}{2s\varepsilon}\left[e^{-(a-\varepsilon)s} - e^{-(a+\varepsilon)s}\right] = e^{-as}\left[\frac{e^{s\varepsilon}-e^{-s\varepsilon}}{2s\varepsilon}\right]$$

وبالتالي سنجد أن

$$Ł\{\partial\,(t-a)\} = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-as}\left[\frac{e^{s\varepsilon}-e^{-s\varepsilon}}{2s\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-as}\left[\frac{se^{s\varepsilon}+se^{-s\varepsilon}}{2s}\right] = e^{-as}.$$

وكنتيجة لذلك سنجد أن

$$Ł\{\partial\,(t)\} = 1.$$

وهذه النتيجة تؤكد أن دالة دلتا ديراك ليست نوع عادي من الدوال فهي تتعارض مع المبرهنة (1- 2) التي تبين أن $Ł\{f\,(t)\} \to 0 \quad \text{as} \quad s\to\infty$

فبعض علماء الرياضيات لا يتعاملون مع دالة ديراك الجدلية من خلال تعريفها المرتبط بدالة الدفع الواحدية ولا بالقول أنها دالة تأخذ قيمتين هما 0 ، ∞ وإنما يعتبرون أن أفضل وصف لها يكون من خلال تأثيرها على الدوال الأخرى فإذا كانت f دالة مستمرة فإن $\int_0^\infty \boldsymbol{f(t)\,\partial(t-a)\,dt = f(a)}$ حيث يمكن إعتبار هذه الصيغة

تعريف لدالة دلتا ديراك وهي تتفق مع الخاصية (1) أعلاه حيث أن $(t) = 1$ في هذه الحالة ومع المبرهنة السابقة حيث أن $(t) = e^{-st}$ وبالتالي يمكننا أن نستنتج أن

$$Ł\{\boldsymbol{f(t).\partial(t-a)}\} = \boldsymbol{f(a)e^{-as}}\ ;\ \boldsymbol{a>0}\ .$$

(4) دالة جاما و علاقتها بتحويل لابلاس

تعرف دالة جاما بالشكل $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\ e^{-x}\,dx$ حيث $t > 0$ لضمان تقارب هذا التكامل المعتل.

ولذلك فإن هذا التعريف التكاملي يعطينا قيم لدالة جاما فقط عند الأعداد الحقيقية الأكبر من صفر ، وهناك تعريفات أخرى لها يمكن من خلالها إيجاد قيم لدالة جاما عند الأعداد الحقيقية السالبة بإستثناء الصحيحة منها والصفر فهي غير معرفة عندها ، ولكن ما يهمنا في هذا البحث هو الجزء الموجب من المحور الحقيقي. ومن أهم خواص هذه الدالة *العلاقة المرتدة* التالية والتي تعتبر تعميم لعملية المضروب المعرفة على الأعداد الصحيحة غير السالبة :

$$\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$$

حيث يمكننا الحصول على هذه النتيجة من التعريف أعلاه بإستخدام طريقة التكامل بالتجزيء.

وفي حالة n عدد طبيعي ستكون $\Gamma(n) = (n-1)!$ ، ومن النتائج المهمة التي يمكن الحصول عليها أيضاً من هذا التعريف هي : $\Gamma(½) = \sqrt{\pi}$. وفي الحقيقة أنه من خلال هاتان النتيجتان يمكننا حساب قيم لدالة جاما عند الأعداد غير الصحيحة سواء كانت سالبة أو موجبة فمثلاً :

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}.\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\,,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$$

أي أن $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ وهكذا .....

الآن إذا حاولنا إيجاد تحويل لابلاس للدالة $f(t) = t^r$ حيث r عدد حقيقي

$$Ł\{t^r\} = \int_0^\infty t^r\ e^{-st}\ dt\ ,\ \text{put}\ \ u = st \qquad du = s\,dt,\ u: 0 \to \infty$$

$$Ł\{t^r\} = \frac{1}{s}\int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^r e^{-u}\ du = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}.$$

وبطبيعة الحال من تعريف دالة جاما ولتقارب هذا التكامل سنشترط أن $r > -1$.

ومن هذه النتيجة يمكننا معرفة تحويل لابلاس لدوال مثل :/

$$Ł\{\sqrt{t}\} = \frac{\Gamma(3/2)}{\sqrt{s^3}} = \frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{s^3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}\ ,\ Ł\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\pi/s}\ ,\ \text{and so on .}$$

فباستخدام تعريف دالة جاما التكاملي أصبح بإمكاننا حساب تحويل لابلاس وأيضاً تحويل لابلاس العكسي لدوال كان من الصعب حسابه بالطرق التقليدية التي كانت تعتمد على التعريف التكاملي لتحويل لابلاس العكسي الذي يعرف بـ

Bromwich integral فإذا أعتبرنا أن F(s) دالة تحليلية في منطقة ما $R(z) > a$ من المستوى المركب فإن

$$f(t) = Ł^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{zt}\ dz$$

والذي تم إستنتاجه بعد توسيع نطاق الدالة F(s) ليصبح المستوى المركب أو حزءً منه ، بمعنى آخر اعتبرنا المتغير s متغير مركب بدلاً من متغير حقيقي للإستفادة من فكرة الدالة التحليلية و مبرهنة كوشي وغيرها من الأفكار التي لا يمكننا إستخدامها في مجالنا الحقيقي ، والجدير بالذكر مادمنا فتحنا موضوع المتغيرات المركبة أنه يوجد مبرهنة لطالما استخدمت في حساب تحويل لابلاس العكسي هي الأخرى كبديل للتكامل الصعب أعلاه في حالة ما أعتبرنا أن الدالة F(s) تحليلة على يمين الخط المستقيم $R(z) = a$ وتمتلك نقاط شاذة معزولة s_i في المنطقة $R(z) < a$ فإن $Ł^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^{n} \text{Res}(e^{st}F(s), s_i)$ حيث $\text{Res}(^{st}F(s), s_i)$ هو باقي الدالة $e^{st}F(s)$ عند s_i في مفكوك متسلسلة لورانت لهذه الدالة حول هذه النقطة والذي يوجد العديد من الطرق البسيطة لحسابه خاصةً عندما تكون هذه النقطة الشاذة قطب وهو الشائع أصلاً . ولكن في الحقيقة لم تعد هذه بالكسور الجزئية F(S) الطرق كثيرة الإستخدام في حساب تحويل لابلاس العكسي بإستثناء طريقة تحليل الدالة

خاصة إذا كانت الدالة تحقق شروط المبرهنة التالية :

(5) مبرهنة هايفيسايد Heaviside's Expansion Formula [3]

لتكن $F(s) = \frac{U(s)}{V(s)}$ ، بحيث أن $U(s)$ ، $V(s)$ كثيرتي حدود وأن درجة $U(s)$ أصغر من درجة $V(s)$ ولا يمتلكان عوامل مشتركة وأن $V(S)$ لها جذور مختلفة ولتكن $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$ فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\{\,F(s)\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{U(ci)}{V'(ci)} e^{cix}$$

البرهان :/

بما أن $V(S)$ لها جذور مختلفة $c_1, c_2, .., c_n$ فإنه يمكن تحليلها إلى n عامل خطي و باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$F(s) = \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{k1}{s-c1} + \frac{k2}{s-c2} + \dots + \frac{kn}{s-cn} = \sum_{i=1}^{n} \frac{ki}{s-ci}$$ حيث $k_1, k_2, \dots, k_n$ ثوابت

و بما أن $\lim_{s\to ci} \frac{U(s)}{V(s)}(s-ci) = k_i$ ولكن $\lim_{s\to ci} \frac{U(s)}{V(s)}(s-ci) = \lim_{s\to ci} \frac{(s-ci)}{V(s)} \lim_{s\to ci} U(s)$

$= \lim_{s\to ci} \frac{(s-ci)}{V(s)-V(ci)} \lim_{s\to ci} U(s) = \frac{U(ci)}{V'(ci)}$ إذاً $V(ci) = 0$ وحيث أن

و هذا يعني أن $k_i = \frac{U(ci)}{V'(ci)}$ و بالتالي نجد أن $F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{U(ci)}{V'(ci)} \left(\frac{1}{s-ci}\right)$

و بأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{U(ci)}{V'(ci)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-ci}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{U(ci)}{V'(ci)} e^{cix} \quad \blacksquare$$

فمثلاً لإيجاد تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s) = \frac{s}{s^2-9}$ باستخدام المبرهنة السابقة

$U(s) = s$ ، $V(s) = s^2 - 9$ ، $V'(s) = 2s$ ، $c_1 = -3$ ، $c_2 = 3$ و بالتالي

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\} = \frac{U(-3)}{V'(-3)} e^{-3t} + \frac{U(3)}{V'(3)} e^{3t} = \frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{3t} = \cosh(3t)\,.$$

(6) تحويل لابلاس و علاقته بعملية إلتفاف دالتين

إذا كانت f ، g دالتين مستمرتين مقطعياً على الفترة $[0, \infty)$ فإن عملية إلتفاف f ، g تعرف كالتالي

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du$$

و من أهم خواص هذه العملية أنها :/

(1) تبديلية : أي أن $f * g = g * f$

(2) تنسيقية $f*(g* k) = (f * g) * k$

(3) توزيعية $f * (g + k) = f * g + f * k$ ، و ما يهمنا في هذا البحث هو النتيجة التالية :

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)\,G(s)$$

و بالتالي $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$

مثال(6-1) :/ لإيجاذ تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$

نفرض أن $F(s) = \frac{1}{s}$, $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ و بالتالي سنجد أن $f(t) = 1$ ، $g(t) = \sin(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = f(t) * g(t) = \int_0^t \sin(u)\, du = \cos(t) - 1.$$

مثال(6-2) :/ لإيجاذ تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s) = \frac{1}{s^2-s-12}$

$$= \frac{1}{(s-4)(s+3)}$$

نفرض أن $F(s) = \frac{1}{s-4}$, $G(s) = \frac{1}{s+3}$ و بالتالي سنجد أن $f(t) = e^{4t}$ ، $g(t) = e^{-3t}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-s-12}\right\} = f(t) * g(t) = \int_0^t e^{-3u} e^{4(t-u)}\, du = \frac{1}{7}\left(e^{4t} - e^{-3t}\right)\,.$$

(7) تحويل لابلاس لمشتقة الدالة

لتكن $f(t)$ دالة قابلة للاشتقاق مشتقتها الدالة $f'(t)$ فإن

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t) e^{-st}\, dt$$
$$= f(t)\, e^{-st} \Big|_0^\infty - s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}$$
$$= s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\,.$$

ومنه يمكننا استنتاج أن تحويل لابلاس للمشتقة الثانية للدالة

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s[s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$
$$= s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} - s f(0) - f'(0)\,.$$

وبشكل عام يمكننا استنتاج أن :

$$\text{ł}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\text{ł}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots\ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots\ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

ولهذا التحويل الخاص بالمشتقة استخدامات كثيرة قي حل المعادلات التفاضلية ذات الشروط الابتدائية والحدية .

(8) تحويل لابلاس كمتسلسلة لانهائية

باستخدام التكامل بالتجزئة لعدة مرات سنحصل على النتيجة التالية

$$\int f(t)e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}}{s}\left[f(t) + \frac{f'(t)}{s} + \frac{f''(t)}{s^2} + \ldots\ldots\right]$$

وبالتالي سيكون من السهل الحصول على

$$\text{ł}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \frac{f(0)}{s} + \frac{f'(0)}{s^2} + \frac{f''(0)}{s^3} + \ldots\ldots$$

المراجـــــع

(1) Dennis G. Zill, Warren S. Wright, Differential Equations with Boundary-Value Problems, Eighth Edition, 2013

(2) Dinesh Verma, Amit Pal singh, Applications of Inverse Laplace Transformation, Compliance Engineering Journal, 2013

(3) Richard Haberman, Applied partial differential equations with Fourier Series and Boundary Value Problems , Fifth

Edition ,2013

(4) Wei-Chau Xie, Differential Equations for Engineers, , Cambridge University Press, 2010