



تقصي عددي للاستقرار الطيفي وتوزيع القيم الذاتية في المصفوفات العشوائية غير المتناظرة:

نهج الاطيفاف الزائفة باستخدام برنامج MATLAB

نهلة عياد قلية¹ - منال إبراهيم الجراي² - علي عمر الدالي³

^{1,2} جامعة الزاوية / كلية التربية العجيلات: قسم الرياضيات

³ جامعة الزاوية / كلية هندسة الموارد الطبيعية- العجيلات.

A Numerical Investigation of Spectral Stability and Eigenvalue Distribution in Non-Symmetric Random Matrices: A Pseudospectra Approach Using MATLAB

Nahla Ayad Qaliya¹, Manal Ibrahim Al-Jarai², Ali Omar Al-Dali³

University of Zawiya / Faculty of Education (Al-Ajelat): Department of Mathematics^{2,1}

University of Zawiya / Faculty of Natural Resources Engineering – Al-Ajelat³

Corresponding Author's Email: n.iqlayyah@zu.edu.ly

Corresponding Author's orcid: <https://orcid.org/0009-0002-7733-970X>

Received: 10/8/2026 Revised: 13/8/2026 Accepted: 05/9/2026 Publication: 05/10/2026

المخلص

تعد نظرية المصفوفات العشوائية (RMT) أداة رياضية جوهرية لنمذجة وفهم سلوك الأنظمة المعقدة في الفيزياء والهندسة. تهدف هذه الورقة الى تقديم استقصاء عددي و تحليلي معمق لتوزيع القيم الذاتية (Eigenvalues) والاستقرار الطيفي في المصفوفات العشوائية غير المتناظرة، مع التركيز بشكل خاص على التحقق من قانون الدائرة (Circular Law) وظاهرة عدم النورمالية (Non – normality).

اعتمدت المنهجية البحثية على تطوير اطار عمل حاسوبي عالي الدقة باستخدام بيئة المحاكاة MATLAB، حيث أجريت عمليات محاكاة على نطاق واسع لمجموعة من المصفوفات ذات ابعاد متدرجة (N=100, 400, 1000) لتتبع السلوك الطيفي من تأثيرات الحجم المحدود وصولاً الى حد النهاية العظمى. و لتجاوز قصور التحليل الطيفي التقليدي في كشف الحساسية تجاه الاضطرابات، توظف الدراسة الاطيفاف الزائفة (Pseudospectra) كأداة تشخيصية متقدمة لتحديد مناطق عدم الاستقرار الجبري في المستوى العقدي. اتضح من النتائج وجود تطابقاً وثيقاً بين التوزيع الطيفي التجريبي والتوقعات النظرية لقانون الدائرة، حيث تزداد كثافة القيم الذاتية بانتظام داخل قرص الوحدة مع نمو حجم المصفوفة. كما كشفت تحليلات الاطيفاف الزائفة عن تعقيدات بنيوية وحساسية طيفية مفرطة داخل قرص الوحدة تزداد حدتها بزيادة ابعاد المصفوفة، مما يثبت ان القيم الذاتية المجردة قد لا توفر صورة كافية عن استقرار النظام. تم تأكيد الموثوقية العددية للنتائج من خلال تدقيق متبقي المعيار (Residual Norm) الذي حقق مستويات دقة فائقة تلامس حدود صفر الالة 10^{-15} ، مما يضمن سلامة الاستنتاجات العلمية المقترحة.

الكلمات المفتاحية: المصفوفات العشوائية، الاطيفاف الزائفة، قانون الدائرة، الاستقرار الطيفي، الجبر الخطي العددي.

Abstract

Random Matrix Theory (RMT) serves as a fundamental mathematical tool for modeling and understanding the behavior of complex systems in physics and engineering. This paper presents an in-depth numerical and analytical investigation into the eigenvalue distribution and spectral stability of non-symmetric random matrices, focusing specifically on verifying the Circular Law and the phenomenon of non-normality. The research methodology involved developing a high-precision computational framework using the MATLAB simulation environment; large-scale simulations were conducted on matrices of varying dimensions ($N = 100, 400, 1000$) to track spectral behavior from finite-size effects through to the large-limit regime. To overcome the limitations of traditional spectral analysis in detecting sensitivity to perturbations, the study

employs pseudospectra as an advanced diagnostic tool to identify regions of algebraic instability in the complex plane. The results demonstrate close agreement between the empirical spectral distribution and the theoretical predictions of the Circular Law, with eigenvalue density increasing uniformly within the unit disk as matrix size grows. Furthermore, pseudospectral analyses revealed structural complexities and heightened spectral sensitivity within the unit disk—intensifying with larger matrix dimensions—thereby demonstrating that eigenvalues alone may not provide a sufficient picture of system stability. The numerical reliability of the results was confirmed by examining the residual norm, which achieved high levels of precision approaching the machine epsilon limit of 10^{-15} , thereby ensuring the validity of the proposed scientific conclusions.

Keywords: Random matrices, pseudospectra, circular law, spectral stability, numerical linear algebra.

1. المقدمة (Introduction)

تعد نظرية المصفوفات العشوائية (Random Matrix Theory – RMT) في الوقت الحالي احدى الحقول الرياضية الحيوية ، حيث تتقاطع فيها مفاهيم الجبر الخطي ، ونظرية الاحتمالات ، والفيزياء الإحصائية لتفسير سلوك الأنظمة المعقدة [1] . ولقد حظي توزيع القيم الذاتية (Eigenvalues) منذ ظهور هذه النظرية باهتمام بالغ ، لاسيما في حالة المصفوفات الغير متماثلة (Non - Symmetric Matrices) التي تخضع الى قانون الدائرة [2] . وجوهر هذا القانون ينص على ان القيم الذاتية للمصفوفات العشوائية ذات الادخالات المستقلة والموزعة بشكل متماثل تقترب من توزيع موحد داخل قرص الوحدة في المستوى العقدي مع نمو حجم المصفوفة (N) نحو اللانهاية [2]، [3] .

وعلى الرغم من ثبات واتزان النظري لقانون الدائرة، الا ان التطبيق العددي يواجه تحديات جوهرية تتعلق بظاهرة عدم النورمالية ، حيث تظهر القيم الذاتية حساسية مفرطة تجاه الاضطرابات الطيفية في مدخلات المصفوفة [4]. هذه الحساسية تعني ان الطيف التقليدي قد لا يوفر صورة كاملة عن استقرار النظام الرياضي او الفيزيائي قيد الدراسة [5].

ومن هنا تبرز الحاجة الماسة لتوظيف الاطيف الزائفة كأداة تحليلية متقدمة وقادرة على كشف البنية الخفية للاستقرار والحساسية الطيفية التي تعجز القيم الذاتية المجردة عن تبانها [6]، [7]. من هذا المنطلق تأتي هذه الورقة لتقديم استقصاء عددي عالي الدقة باستخدام بيئة المحاكاة MATLAB، مستفيدة من التطورات البرمجية في الحوسبة المتوازية لمعالجة مصفوفات ضخمة تصل الى $N=1000$. بدمج التحليل الجبري التقليدي مع خرائط الاطيف الزائفة يسمح ببناء ممر بين التوقعات النظرية والواقع العددي، مع ضمان اعلى معايير السلامة العددية من خلال تدقيق باقي المعيار (Residual Norm) بمستويات عالية الدقة [4].

1.1 فلسفة الاطيف الزائفة من الاستقرار السكوني الى الديناميكية الطيفية :

تتمثل الفلسفة الجوهرية للأطيف الزائفة في الانتقال من المفهوم التقليدي السكوني للقيم الذاتية بوصفها نقاطاً معزولة ، الى مفهوم ديناميكي ينظر الى الطيف كبنية مكانية متصلة وحساسة في المصفوفات العادية (Normal Matrices) ، تعمل القيم الذاتية كمرشد موثوق لسلوك النظام ، الا ان المصفوفات غير المتماثلة وهي المحور الأساسي لنظرية المصفوفات العشوائية في هذه الدراسة تخفي وراء قيمها الذاتية حساسية مفرطة تجاه الاضطرابات الطيفية. ان الاطيف الزائفة لا تجيب فقط على سؤال اين تقع القيم الذاتية، بل تجيب على السؤال الأكثر حرجاً في الفيزياء الحسابية الى اين يمكن ان تذهب هذه القيم تحت تأثير ادنى خطأ عددي او اضطراب في النظام من خلال رسم خرائط الكنتور، تنتقل من مجرد رصد قانون الدائرة كنظرية تقاربية الى تشخيص عدم الاستقرار الجبري الكامن داخل المصفوفة. وبهذا تصبح الاطيف الزائفة هي المجهز الذي يكشف عن المناطق التي يكون فيها النظام الرياضي هشاً او قريباً من الانهيار، وهو ما يجعلها أداة لا غنى عنها لضمان موثوقية المحاكاة العددية في بيئات الحوسبة عالية الدقة مثل MATLAB.

2.1 أهداف البحث (Research Objectives)

أهمية هذه الدراسة تقدم تحليل شامل ومعمق لديناميكيات الطيف في المصفوفات العشوائية، ويمكن تلخيص اهداف البحث فيما يلي:

- **التحقق التجريبي من قانون الدائرة :** أثبات تقارب التوزيع الطيفي نحو قرص الوحدة عبر محاكاة مجموعات مصفوفيه بأحجام متدرجة (1000 , 400 , 100) لتوثيق السلوك المتقارب (Asymptotic Behavior) .
- **قياس الحساسية الطيفية عبر الاطيفاف الزائفة:** رسم خرائط الكنتور اللوغاريتمية للأطيفاف الزائفة لتحديد مناطق عدم الاستقرار الجبري، لاسيما عند حدود دائرة الوحدة، وتحليل كيفية تطور هذه المناطق مع زيادة ابعاد المصفوفة.
- **تقييم الاستقرار العددي والدقة المتناهية:** برهنة كفاءة الخوارزميات العددية المستخدمة في MATLAB من خلال قياس باقي المعيار لجميع الأزواج الذاتية، وضمان بقاء الخطأ الحسابي ضمن حدود صفر الالة لضمان موثوقية النتائج.
- **تحليل أثر الحجم (Scalig Analysis) :** دراسة الفروقات الجوهرية في البنية الطيفية بين المصفوفات ذات الابعاد الصغيرة والكبيرة ، وتحديد مدى سرعة التقارب نحو الحالة المثالية التي تنبأ بها المبرهنات الرياضية .

2 . الاطار الرياضي وقانون الدائرة (Mathematical Framework)

تعتمد الدراسة على تحليل مصفوفة مربعة A من الرتبة N ، حيث تكون ادخالاتها a_{ij} متغيرات عشوائية مستقلة وموزعة بشكل ممتثل (i.i.d) .

• التوزيع الطيفي التجريبي

يُعرف التوزيع الطيفي التجريبي (ESD) للمصفوفة A بأنه مقياس احتمالي يوزع كتلة متساوية على كل قيمة ذاتية ، ويصاغ رياضيا كما يلي [1]:

$$\mu_A = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j} \rightarrow (1)$$

حيث:

μ_A : يمثل المقياس او التوزيع الطيفي التجريبي للمصفوفة، وهو دالة احتمالية تصف كيفية انتشار القيم الذاتية في المستوى العقدي.

N : يمثل البعد أي رتبة المصفوفة المربعة، حيث اخذت القيم 100، 400، 1000.

λ_j : ترمز للقيم الذاتية للرقم (j) للمصفوفة (A) .

δ : دالة ديراك (Dirac Delta) حيث استخدمت هنا لتمثيل كتلة نقطية عند كل قيمة ذاتية تم حسابها .

• قانون الدائرة (The Circular Law)

ينص قانون الدائرة على انه اذا تم قياس المصفوفة بعامل $\frac{1}{\sqrt{N}}$ فان التوزيع الطيفي يقترب من التوزيع الموحد داخل قرص الوحدة في المستوى العقدي عندما $N \rightarrow \infty$ [2]:

$$A_{norm} = \frac{1}{\sqrt{N}} A \rightarrow (2)$$

حيث :

A_{norm} : المصفوفة العشوائية بعد عملية القياس لضمان وقوع قيمها الذاتية داخل دائرة الوحدة.

A : المصفوفة العشوائية الاصلية المولدة بتوزيع طبيعي قياسي .

$\sqrt{N}$: عامل القياس (الجذر التربيعي للحجم) وهو ضروري لتحقيق شروط (قانون الدائرة) عند النهايات العظمى.

• تعريف الاطيفاف الزائفة

يعرف الطيف الزائف ϵ - للمصفوفة A بأنه مجموعة النقاط Z في المستوى العقدي والتي تحقق الشرط التالي [5]:

$$\Lambda_\epsilon(A) = \{z \in C: \|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}\} \rightarrow (3)$$

حيث :

$\Lambda_\epsilon(A)$: الطيف الزائف للمصفوفة A عند مستوى الاضطراب ϵ .

Z : نقطة اختيارية في المستوى العقدي C يتم فحص انتمائها للطيف الزائف .

ϵ : متغير يمثل حجم الاضطراب او الخطأ المسموح به (Perturbation Level) .
 I : مصفوفة الوحدة (Identity Matrix) من الرتبة N .

حجم المصفوفة (N)	إجمالي نقاط الشبكة	التكلفة الحسابية لكل نقطة ($O(N^3)$)	وضع المعالجة البرمجية (MATLAB)
100	10,000 نقطة	1×10^6 عملية	معالجة تسلسلية / متوازية
400	10,000 نقطة	6.4×10^7 عملية	معالجة متوازية (par for)
1000	10,000 نقطة	1×10^9 عملية	معالجة متوازية عالية الكثافة

$(zI - A)^{-1}$: يسمى المُلحل (ResoIvent) ، وهو مصفوفة تعبر عن مدى قرب z من أن تكون قيمة ذاتية فعلية .

$\| \cdot \|_2$: المعيار الطيفي للمصفوفة (Spectral Norm) ، ويقاس أقصى تضخيم يمكن أن تحدثه المصفوفة للمتجهات .
وأصغر قيمة مفردة للمصفوفة المزاحة [5]:

(4) $\sigma_{min}(zI - A) \leq \epsilon$ →
حيث : σ_{min} : أصغر قيمة مفردة للمصفوفة المزاحة $(zI - A)$ ؛ وهي الأداة الحسابية التي اعتمد عليها كود MATLAB لضمان الاستقرار العددي .
 $(zI - A)$: المصفوفة المزاحة (Shifted Matrix) عند النقطة z .
ويحسب معيار البواقي (Residual Norm) من المعادلة [4]:

(5) $R = \|Av - \lambda v\|_2$ →
حيث :

R : الباقي المطلق (Absolute Residual) ، وهو مقياس جودة التقريب .

v : المتجه الذاتي المحسوب . (Computed Eigenvector) .

λ : القيمة الذاتية المحسوبة (Computed Eigenvalue) .

3. المنهجية العددية (Numerical Methodology)

تم تصميم الخوارزمية البرمجية لضمان الدقة والكفاءة الحسابية العالية باستخدام MATLAB 2023 حيث تضمنت المنهجية الخطوات التالية :

- توليد البيانات : إنشاء مصفوفات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي القياسي $N(0, 1)$ تم تقاس رياضياً وفق المعادلة (2).
- حساب الاطيفاف الزائفة : وذلك ببناء شبكة حسابية (Computational Grid) بدقة 100×100 فوق المستوى العقدي وحساب القيمة المفردة الصغرى عند كل نقطة شبكية Z
- المعالجة المتوازنة : تجنباً للتعقيد الحسابي الذي يصل الى $O(N^3)$ لكل نقطة ، نستخدم تقنية par for لتسريع العمليات الحسابية كما موضح بالجدول (1) .

يوضح الجدول (1) التدرج في المتطلبات الحسابية اللازمة لإنشاء خرائط الاطيفاف الزائفة بدقة
جدول (1) : تحليل العبء الحسابي والتعقيد الجبري لمحاكاة الاطيفاف الزائفة

شبكة قدرها 100×100 فوق المستوى العقدي ، ويلاحظ انه عند انتقال الدراسة من الحجم المحدود ($N = 100$) الى حد النهاية العظمى ($N = 1000$) ، تضاعفت العمليات الحسابية المطلوبة بمقدار ألف مرة لكل نقطة شبكية . ولمواجهة هذا التعقيد الجبري الذي يتبع الرتبة الثالثة ($O(N^3)$) ، تم الاعتماد بشكل أساسي على تقنية المعالجة المتوازنة par for في بيئة MATLAB 2023 وهذا الأسلوب المنهجي لم يضمن فقط الكفاءة الزمنية للمحاكاة ، بل سمح أيضاً بالحفاظ على استقرار واستمرارية الحسابات للوصول الى دقة عددية فائقة تلامس حدود 10^{-15} عبر جميع الحالات قيد الدراسة .

- **التحقق من الصحة :** قياس "معياري البواقي" (Residual Norm) لضمان ان النتائج ليست ناتجة عن أخطاء التقريب الحسابي .

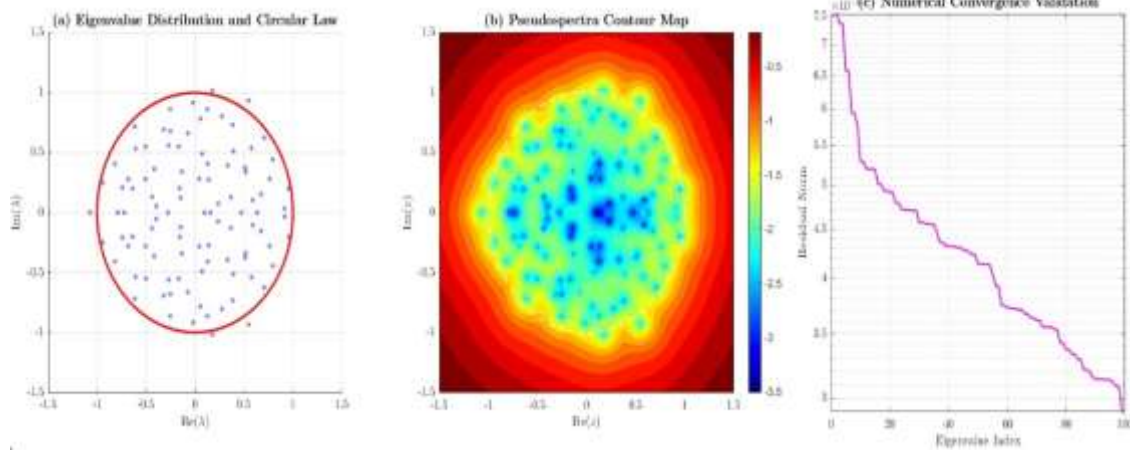
4. النتائج والمناقشة (Results and Discussion)

يستعرض هذا القسم التحليل التفصيلي للنتائج العددية التي تم الحصول عليها من خلال محاكاة MATLAB للمصفوفات العشوائية الغير المتناظرة (غير المتعامدة - Non-normal) . لقد تم اجراء التجارب على ثلاث مستويات (1000 , 400 , 100) لتتبع السلوك الطيفي من تأثيرات الحجم المحدود (Finite-Size Effects) وصولاً الى حد النهاية العظمى (Asymptotic Limit) وتم تقسيم كل لوحة نتائج الى ثلاثة أجزاء متكاملة : (أ) توزيع القيم الذاتية وعلاقته بقانون الدائرة ، (ب) خريطة الاطيفاف الزائفة ، (ج) التحقق من الدقة العددية .

1.4 التحليل الأساسي وتأثيرات الحجم المحدود ($N = 100$)

1.1.4 توزيع القيم الذاتية والاستقرار الطيفي الاولي

في اللوحة (a) من الشكل (1) ($N = 100$) يتم ترحيل القيم الذاتية المحسوبة كنقاط زرقاء في المستوى العقدي ، مع تراكب حدود قرص الوحدة النظري (الخط الأحمر المتصل) . يلاحظ ان توزيع النقاط يتبع بشكل تقريبي قانون الدائرة ، نظراً لصغر حجم المصفوفة ($N = 100$) نجد ان الغالبية العظمى من النقاط تقع داخل حدود قرص الوحدة . ومع ذلك تظهر بوضوح تأثيرات الحجم المحدود على شكل تكتلات غير متساوية ومناطق فارغة داخل القرص ، إضافة الى بضع "نقاط شاذة" (Straggler points) تقع خارج الحدود النظري مباشرة . هذا التوزيع الاولي يثبت صحة قانون الدائرة من حيث التوجه ، لكنه يفتقر الى الانتظام المقارب .



الشكل (1): التحليل الطيفي المركب والتحقق العددي لمصفوفة عشوائية غير متناظرة عند الحجم $N=100$. تشمل

اللوحة: (a) توزيع القيم الذاتية التجريبي مقارنة بقانون الدائرة النظري، (b) خريطة كينتور الأطياف الوائفة (Λ_e)

الموضحة للحساسية الطيفية، (c) منحنى التحقق من تقرب معياري البواقي العددي.

1.4.2 تحليل خريطة كنتور الاطيفاف الزائفة

تظهر اللوحة (b) من الشكل (1) خريطة الاطيفاف الزائفة (Λ_e) للمصفوفة . يتراوح مقياس الألوان اللوغاريتمي من الأحمر الداكن (أقصى استقرار / أقل حساسية للاضطراب) الى الأزرق الداكن (أعلى حساسية للاضطراب ، تلامس حدود القيم الذاتية) . داخل دائرة الوحدة المحددة بالخط المتقطع الأبيض، تكون خطوط الكفاف مستوية نسبياً وهادئة، مما يشير الى حساسية طيفية معتدلة خارج الدائرة، تتدرج للألوان بسرعة نحو الأحمر، مما يدل على ان الاطيفاف الزائفة تنقلص بسرعة لتصبح قريبة جداً من الطيف الفعلي، وهذا السلوك متوقع حيث تزداد استقرار النظام الطيفي بعيداً عن مركز التوزيع. هذه الخريطة الهادئة تعكس مصفوفة طبيعية تقريباً في هذا الحجم.

1.4.3 التحقق من التقارب العددي

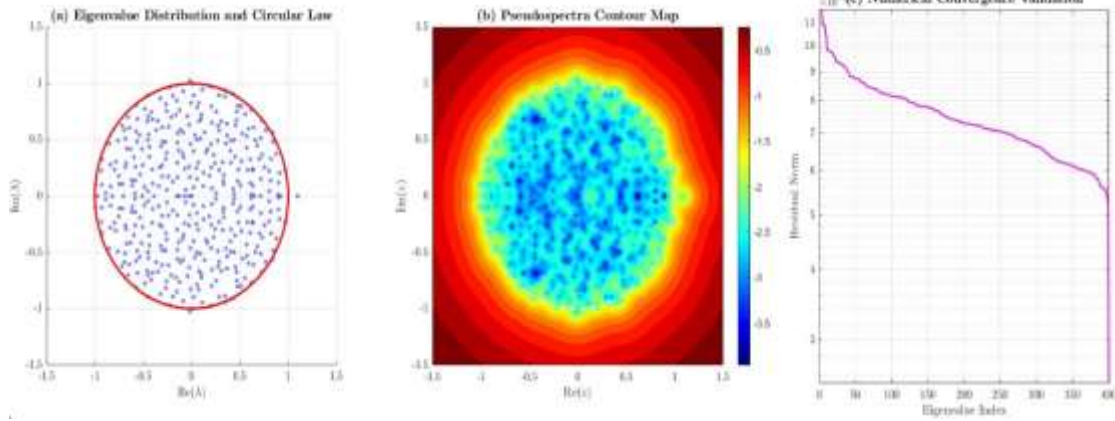
تؤكد اللوحة (c) من الشكل (1) سلامة الحسابات العددية، وهذا يضمن ان النتائج ليست ناتجة عن أخطاء برمجية. يوضح الرسم البياني معياري البواقي (Residual Norm) لكل زوج ذاتي مناظر. من الواضح ان قيم المتبقي تقع جميعها في النطاق الضيق جداً بين (7.5×10^{-16} و 3.5×10^{-16}).

هذا الانحدار السلس والاستقرار عند مستويات قريبة من صفر الالة (Machine Epsilon) يثبت ان خوارزميات MATLAB العددية قد حققت تقارباً فائق الدقة ، مما يجعل التحليلات الطيفية التالية ذات موثوقية عالية جداً .

2.4 الانتقال نحو الكثافة العالية وظواهر العالمية (N = 400)

1.2.4 تعميق الكثافة الطيفية ومطابقة النظرية

بزيادة حجم المصفوفة الى (N = 400) كما موضح بالشكل (2) يتغير المشهد الطيفي بشكل جذري في اللوحة (a) . تصبح القيم الذاتية أكثر كثافة بشكل ملحوظ وتملا قرص الوحدة بانتظام اكبر بكثير مقارنة ب (N = 100) تكاد حدود التوزيع تلامس الخط الأحمر المتصل بدقة ، مما يشير الى اختفاء معظم النقاط الشادة و تأكيد قوة " قانون الدائرة " مع اقترابنا من الحد المقارب . هذا الانتظام يجعل التوزيع الطيفي يعتمد فقط على متوسط وتباين إدخال المصفوفة وليس على تفاصيل الحجم .



الشكل (2): التحليل الطيفي المركب والتحقق من الاستقرار العددي لمصفوفة عشوائية غير متناظرة بحجم متوسط (N=400)

تشمل اللوحات: (a) كثافة توزيع القيم الذاتية وتقربها نحو قانون الدائرة، (b) خريطة كنز الأطياف الزائفة (Λ_ε) التي تظهر نشوء مناطق عدم الاستقرار الجوي، (c) تحليل معيار البواقي لتقييم الدقة الحسابية المنخوة عبر MATLAB.

2.4.2 ظهور التعقيد في الاطيف الزائفة وزيادة حساسية النظام

تعكس اللوحة (b) في الشكل (2) (N = 400) زيادة محورية واساسية في التعقيد الطيفي بدلا من الكفاف المستوى الهادئ ، تظهر داخل قرص الوحدة تشكيلات كنتورية غير منتظمة و مناطق زرقاء أوسع وأكثر تعقيداً . هذا يدل على ان (Eigenvalues) الفردية أصبحت أكثر حساسية للاضطرابات، وان المصفوفة أصبحت غير طبيعية (Highly non – normal) بشكل اكبر مع زيادة الحجم . وهذا يظهر بوضوح في التدرجات اللونية الأكثر حدة داخل القرص، مما يعني ان مناطق عدم الاستقرار الجبري أصبحت أكثر انتشاراً وتداخلاً.

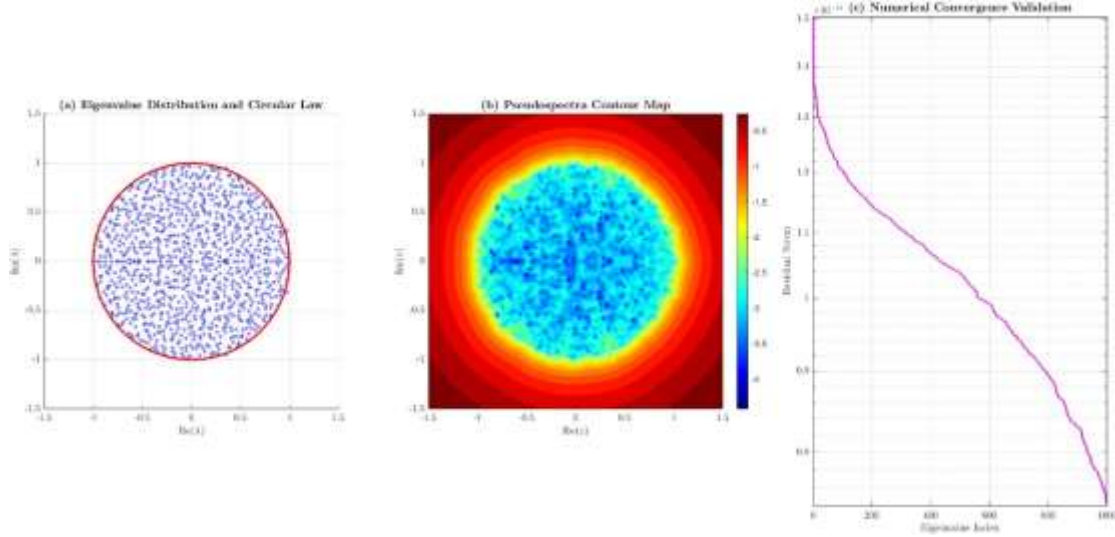
3.2.4 التحقق من الصحة مع زيادة العبء الحسابي

تُظهر اللوحة (C) في الشكل (2) لـ (N = 400) استمرار التقارب العددي الممتاز ، على الرغم من ان المصفوفة اكبر بـ 16 مرة من سابقتها ، الا ان معيار البواقي يتناقص بسلاسة ويستقر بين 1.1×10^{-14} و 3×10^{-15} هذا الارتفاع الطفيف في الباقي المطلق مقارنة ب (N = 100) هو نتيجة طبيعية لتراكم أخطاء الفاصلة العائمة (Floating – Point Accumulation) في مصفوفات اكبر ، ومع ذلك ، بقاء القيم في هذا النطاق الصغير جداً هو برهان قوي على كفاءة النهج العددي المستخدم.

3.4 سلوك النهاية العظمى والتعقيد الطيفي العميق (N = 1000)

1.3.4 التحقق المثالي من قانون الدائرة في الحد المقارب

تمثل اللوحة (a) لـ (N = 1000) في الشكل (3) قمة التحقق في قانون الدائرة . تندمج الاف القيم الذاتية لتشكل قرصاً صلباً ومعتماً من النقاط، يملا قرص الوحدة المحدد بالخط الأحمر تماماً وبدقة متناهية. وتقريباً لا توجد نقاط شادة خارج الدائرة، والحدود حادة ومحددة بشكل مثالي. هذا يثبت ان النظريات الاحتمالية التي تفرض $N \rightarrow \infty$ تصبح واقعاً عددياً دقيقاً عند هذا الحجم ، مما يجعل الورقة مصداقية نظرية قوية .



الشكل (3): التحليل الطيفي الشامل والتحقق من الاستقرار العددي في حد النهاية العظمى ($N=1000$). تشمل اللوحات: (a) التحقق المثالي من قانون الداؤة وتوحد الكثافة الطيفية، (b) خريطة كنطور الأطياف الزائفة (Λ_ϵ) الموضحة للتعقيد والحساسية الطيفية العالية، (c) تقرب معيار الوافي لضمان الموثوقية العددية عند النطاقات الحسابية الواسعة.

4.3.2 عمق التعقيد الطيفي في الاطيفاف الزائفة واستقرار الاطراف

تكشف اللوحة (b) لـ ($N = 1000$) عن عالم خفي من التعقيد الطيفي داخل قرص الوحدة. كما ان التشكيلات الكنتورية تزداد كثافةً وتداخلًا، وتنتشر المناطق الزرقاء عالية الحساسية على مساحات واسعة داخل القرص، وهذا يدل على ان جميع Eigenvalues تقريباً في هذا الحد تصبح حساسة جداً لأي اضطراب خارجي. هذه المصفوفة في الحد المقارب هي نظام غير نورمالي بامتياز.

بالمقابل وخارج قرص الوحدة تصبح خطوط كفاف الخارجية مستديرة وناعمة كحلقات هالة (Halos)، ويدل على ان هذا النظام المعقد داخلياً يمتلك استقراراً طيفياً عميقاً ومستقر جداً بعيداً عن مركز الاحداث الطيفية. وهذا التباين بين التعقيد الداخلي والانتظام الخارجي هو اكتشاف جوهري تعززه خرائط الاطيفاف الزائفة.

4.3.3 التحقق النهائي من الصحة لبيانات الحجم الكبير

تظهر اللوحة (c) لـ ($N = 1000$) ان التقارب العددي يظل مستقراً حت عند هذا الحجم الحسابي الهائل. تنخفض قيم المتبقي بسلاسة من حوالي 1.5×10^{-14} الى 0.75×10^{-14} . بقاء الخطأ دون عتبة 10^{-13} لـ 1000 قيمة ذاتية هو برهان عدد متين (Robust) عل كفاءة الخوارزميات المستخدمة. مما يضمن ان كافة النتائج الطيفية والاطيفاف الزائفة ليست ناتجة عن اخطاء في التراكم العددي.

4.4 مناقشة ومقارنة: الاطيفاف كأداة تشخيصية

بمقارنة الحالات الثلاث، نلاحظ اتجاهين متضادين ولكن متكاملين:

1. **توزيع القيم الذاتية:** بزيادة N ، يتحسن الالتزام بقانون الدائرة بشكل كبير مما يؤكد حد العالمية في التوزيع.

2. **الاطيفاف الزائفة:** بزيادة N ، يزداد التعقيد الداخلي وشدة الحساسية الطيفية (غير النورمالية)، بينما يزداد استقرار الاطيفاف الخارجية.

هذا يؤكد انه في المصفوفات العشوائية الكبيرة التحليل التقليدي للقيم الذاتية وحده ليس كافياً لفهم الاستقرار؛ ففي اللوحات الطيفية يتضح ان النظام يصبح اكثر كثافة واكثر حساسية في نفس الوقت. ان استخدام الاطيفاف الزائفة في هذه الورقة قد وفر أداة تشخيصية عميقة تتجاوز المعلومات الأساسية التي يوفرها الطيف المجرد.

5. الاستنتاجات (Conclusions)

قدمت هذه الرسالة استقصاءً عددياً دقيقاً للخصائص الطيفية للمصفوفات العشوائية غير متناظرة، مع التركيز عل سلوكها والنهج الذي تتبعه عند حد النهاية العظمى. ومن خلال استخدام بيئة المحاكاة MATLAB، تمكن البحث من تقديم براهين عديدة قوية تدعم النظريات الاحتمالية الجبرية. وهذه الاستنتاجات يمكن تلخيصها فيما يلي:

- **التحقق من قانون الدائرة :** اثبتت النتائج العددية تقارب التوزيع الطيفي التجريبي نحو قرص الوحدة بوضوح متزايد مع زيادة نمو حجم المصفوفة ($N = 100$) الى ($N = 1000$) وقد تلاشت تأثيرات الحجم المحدود (Finite – Size Effects) تدريجياً ليتحقق قانون الدائرة بشكل مثالي عند الحجم الأكبر ، مما يؤكد مبدأ العالمية في هذه المجموعات المصفوفية .
- **كشف الحساسية الطيفية :** كشف تحليل الاطيف الزائفة λ_e عن معلومات محورية لا توفرها القيم الذاتية التقليدية ، حيث وضحت خرائط الكنتور ان المصفوفات العشوائية غير المتناظرة هي أنظمة غير نورمالية بامتياز ، وكلما زادت ابعاد المصفوفة زاد تعقيد حساسية الطيف للاضطرابات تبعاً لذلك . مما يجعله عاملاً حاسماً في تقييم استقرار الأنظمة الديناميكية المعقدة .
- **الموثوقية والدقة العددية:** حافظت هذه الدراسة على السلامة العددية الفائقة عبر جميع مستويات المحاكاة ، حيث استقر معيار البواقي عند مستويات تقترب من 10^{-15} . وهذا برهان على كفاءة الخوارزميات المستخدمة وقدرتها بيئة MATLAB على معالجة التحديات الحسابية المرتبطة بالمصفوفات الكبيرة دون التأثير بتراكم أخطاء الفاصلة العائمة.
- **التكامل المنهجي:** اثبت البحث ان الجمع بين خرائط الاطيف الزائفة والتحليل الطيفي التقليدي، وتدقيق بوخاقي المعيار يوفر اطاراً تشخيصياً شاملاً لفهم استقرار المصفوفات، وهو ما يتجاوز التحليل السطحي الذي يكتفي بالقيم الذاتية.

6. التوصيات (Recommendations)

بناءً للنتائج المحققة، نوصي بتوسيع هذا الاطار ليشمل دراسة المصفوفات العشوائية ذات البنية (Structured Random Matrices) مثل مصفوفات تولبيتز (Toeplitz) ، وذلك لبحث مدى صمود قانون الدائرة تحت قيود بنائية معينة . كما نقترح استكشاف أثر توزيعات إحصائية غير طيبعية (Non – Gaussian) على شكل الكفاف الطيفي للأطيف الزائفة.

(References)

1. Mehta, M. L. (2004). *Random Matrices* (3rd ed.). Elsevier Academic Press
2. Tao, T., & Vu, V. (2010). Random matrices: Universality of the circular law. *The Annals of Probability*, 38(5), 2023-2065.
3. Edelman, A., & Rao, N. R. (2005). Random matrix theory. *Acta Numerica*, 14, 233-297.
4. Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
5. Trefethen, L. N., & Embree, M. (2005). *Pseudospectra of Linear Operators: Theory and Applications*. Princeton University Press.
6. Trefethen, L. N. (1997). Pseudospectra of linear operators. *SIAM Review*, 39(3), 383-406.
7. Burke, J. V., Lewis, A. S., & Overton, M. L. (2003). Robust stability and a spectral area formula for planar pseudospectra. *SIAM Review*, 45(4), 805-814.