Al-Farouk journal of sciences
Volume (2), Issue (3) (JUNE, 2026)
ISSN: 3135-2359

مجلة الفاروق للعلوم
المجلد (2) العدد 3 يونيو 2026
ردمد: 3135-2359

"تحليل القيم الذاتية والمتجهات الذاتية وتطبيقاتها في الأنظمة الخطية"

Analysis of Eigenvalues and

جميلة المبروك أوشاح

المعهد العالي للعلوم والتقنية– صبراتة

jamelaoshah@gmail.com

Eigenvectors and Their Applications in Linear Systems

Jamila Al-Mabrouk Awashah

Higher Institute of Science and Technology – Sabratha

تاريخ الاستلام: 2026/04/03 تاريخ المراجعة 02/ 05/ 2026 تاريخ القبول:2026/05/15- تاريخ النشر: 04/ 06/ 2026

الملخص

يهدف هذا البحث إلى دراسة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية باعتبارهما من المفاهيم الأساسية في الجبر الخطي، لما لهما من دور مهم في تحليل الأنظمة الخطية وتبسيطها، وقد تم التطرق إلى التعريفات الأساسية لهذين المفهومين وطرق حسابهما باستخدام المعادلة المميزة، بالإضافة إلى توضيح العلاقة بينهما وبين التحويلات الخطية والمصفوفات. كما تناول البحث أهمية القيم الذاتية والمتجهات الذاتية في تحويل المصفوفات إلى صورة قطرية، مما يسهل حل الأنظمة الخطية والمعادلات التفاضلية، وتم عرض بعض التطبيقات العملية لهذه المفاهيم في مجالات متعددة مثل الهندسة، الفيزياء، وعلوم الحاسوب، وقد خلص البحث إلى أن فهم هذه المفاهيم يسهم بشكل كبير في تبسيط النماذج الرياضية وتحليل الأنظمة المعقدة بكفاءة عالية.

الكلمات المفتاحية.

القيم الذاتية– المتجهات الذاتية– التحويلات الخطية– المعادلة المميزة– تحليل الأنظمة الخطية.

Abstract

This study aims to investigate eigenvalues and eigenvectors as fundamental concepts in linear algebra due to their significant role in analyzing and simplifying linear systems. The research discusses the basic definitions of these concepts and the methods used to compute them through the characteristic equation. It also explains their relationship with linear transformations and matrices. Furthermore, the study highlights their importance in transforming matrices into diagonal form, which simplifies solving linear systems and differential equations. Practical applications of eigenvalues and eigenvectors in various fields such as engineering, physics, and computer science are also presented. The study concludes that a proper understanding of these concepts greatly contributes to simplifying mathematical models and efficiently analyzing complex systems.

Keywords.
Eigenvalues- Eigenvectors- Linear Transformations- Characteristic Equation
Linear Systems Analysis.

المقدمة

يُعدّ **الجبر الخطي** من أهم فروع الرياضيات التي تشكل أساسًا لكثير من التطبيقات العلمية والهندسية، حيث يهتم بدراسة المتجهات والمصفوفات والتحويلات الخطية، ومن بين المفاهيم الأساسية في هذا المجال تبرز **القيم الذاتية والمتجهات الذاتية** باعتبارها أدوات رياضية قوية تُستخدم في تحليل الأنظمة الخطية وفهم سلوكها.

تلعب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية دوراً مهمًا في تبسيط العديد من المسائل الرياضية المعقدة، إذ تساعد في تحويل المصفوفات إلى صورة أبسط (قطرية)، مما يسهل التعامل معها خاصة في حل الأنظمة الخطية والمعادلات التفاضلية. كما أن لهذه المفاهيم تطبيقات واسعة في مجالات متعددة مثل الفيزياء، والهندسة، والاقتصاد، وعلوم الحاسوب، خاصة في تحليل البيانات والنمذجة الرياضية.

ومع التطور التكنولوجي وتزايد الاعتماد على النماذج الرياضية، أصبحت دراسة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية ضرورة لفهم وتحليل الأنظمة المعقدة، مما يبرز أهمية هذا البحث في تسليط الضوء على هذه المفاهيم وتطبيقاتها العملية في الأنظمة الخطية.

مشكلة البحث

تكمن مشكلة البحث في صعوبة فهم وتطبيق القيم الذاتية والمتجهات الذاتية في تحليل الأنظمة الخطية، خاصة في الأنظمة الكبيرة والمعقدة، وتتمثل مشكلة البحث في التساؤل الرئيسي التالي:

كيف يمكن استخدام القيم الذاتية والمتجهات الذاتية في تحليل الأنظمة الخطية وتبسيطها، وما مدى فاعليتها في حل المشكلات الرياضية والتطبيقية؟

ويتفرع عن هذا التساؤل عدة تساؤلات فرعية:

- ما المقصود بالقيم الذاتية والمتجهات الذاتية؟
- كيف يتم إيجادها رياضيًا؟
- ما دورها في تبسيط المصفوفات وتحليل الأنظمة الخطية؟
- ما أهم التطبيقات العملية لها في المجالات المختلفة؟

أهداف البحث

يهدف هذا البحث إلى تحقيق مجموعة من الأهداف، من أبرزها:

- التعرف على القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، وتوضيح طرق حسابها.
- دراسة دورها في تحليل الأنظمة الخطية.
- تطبيقها على أمثلة عملية.

أهمية البحث

تتمثل أهمية البحث في توضيح مفاهيم القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، وإبراز دورها في تبسيط الأنظمة الخطية وتطبيقاتها في المجالات العلمية المختلفة مثل تحليل البيانات والهندسة.

الاطار النظري

1.1. بعض المفاهيم الأساسية في الجبر الخطي

جبر المصفوفات:

تعرف المصفوفة بأنها عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة في شكل صفوف وأعمدة موضوعة داخل قوسين كالآتي:

مجلة الفاروق للعلوم مجلد2 العدد 3 ـــ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22^1} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{nn} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \end{bmatrix}$$

a_{ij} يسمى عنصراً في المصفوفة A ويقع في الصفة رقمi والعمود رقمj .

أي أن i يعبر عن رقم الصف j يعبر عن رقم العمود، كما أن عناصر a_{ij} تسمى عناصر القطر الرئيسي، والمصفوفة قد تكون مربعة إذا كان عدد المصفوفة لا يساوي عدد الأعمدة، وتتعدد درجة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة التي تحتويها.

وتلعب المصفوفات دوراً هاماً عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالي وضع الحلول لهذه العلاقات فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها مجالات تطبيقية عديدة في الاقتصاد والإحصاء وبحوث العميات وغيرها من العلوم الأخرى.

القيم الذاتية و بالمتجهات الذاتية

ترتبط القيم الذاتية ارتباطًا وثيقًا بالمتجهات الذاتية في علم الجبر الخطي، حيث يُستخدم هذان المفهومان في دراسة وتحليل التحويلات الخطية، فالقيم الذاتية تمثل مجموعة مميزة من القيم العددية المرتبطة بحل أنظمة المعادلات الخطية، وغالباً ما تظهر في مصفوفات، أما المتجهات الذاتية فهي متجهات غير صفرية تحتفظ باتجاهها عند تطبيق التحويل الخطي، ولا يطرأ عليها تغيير سوى في مقدارها بواسطة عامل عددي، ويُعرف هذا العامل العددي الذي يؤثر في المتجه الذاتي بالقيمة الذاتية.

وتُعدّ التحويلات الخطية من المفاهيم الأساسية في الجبر الخطي، حيث تُستخدم لدراسة العلاقات بين الفضاءات المتجهية وتحليل بنيتها، ومن أهم الأدوات التي تساعد في فهم هذه التحويلات تمثيلها باستخدام المصفوفات، إذ يمكن تحويل أي تحويل خطي إلى مصفوفة بعد اختيار قواعد مناسبة للفضاءات المعنية، ويُسهم هذا التمثيل في تبسيط العمليات الحسابية ودراسة خصائص التحويل مثل الرتبة والنواة والصورة.

كما أن اختيار القواعد الملائمة يلعب دوراً مهماً في تبسيط شكل مصفوفة التحويل، حيث يمكن في بعض الحالات تحويلها إلى صورة مبسطة (مثل الصورة القطرية أو الصورة القانونية)، مما يسهل تحليلها واستخلاص نتائج مهمة حول طبيعة التحويل.

إذا كان كلٌّ من V و W فضاءين متجهيين منتهيي البعد على نفس الحقل، وكان

$$T : V \longrightarrow W$$

تحويلًا خطيًا، فإنه يمكن إيجاد قاعدتين لكلٍّ من V و W بحيث تكون مصفوفة التحويل T بالنسبة لهاتين القاعدتين في الصيغة الاعتيادية البسيطة.

وفي حالة ما إذا كان:

$$dimV = dimW$$

فإن مصفوفة التحويل تكون مصفوفة مربعة، وقد يكون من الممكن في بعض الحالات تحويلها إلى مصفوفة قطرية.

لكن في الحالة الخاصة عندما:

$$V = W$$

(أي أن التحويل خطي من الفضاء إلى نفسه)، فإنه ليس من الضروري دائمًا أن توجد قاعدة واحدة للفضاء بحيث تكون مصفوفة التحويل بالنسبة لها قطرية، وهذا يعتمد على ما إذا كان التحويل قابلًا للقطرية (Diagonalizable) أم لا.

ولتوضيح ذلك، نعرض المثال التالي:

لنأخذ التحويل الخطي:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

المعرف بالعلاقة:

$$T(x, y) = (x, x)$$

إيجاد مصفوفة التحويل

نأخذ القاعدة القياسية:

$$e_1 = (1,0) \downarrow e_2 = (0,1)$$

نحسب:

$$T(1,0) = (1,1)$$
$$T(0,1) = (0,0)$$

إذن مصفوفة التحويل هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

إيجاد القيم الذاتية

نحسب المحدد:

$$det(A - \lambda I) = 0$$
$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

نحصل على:

$$(1-\lambda)(-\lambda) = 0$$

إذن:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_1 = 1$$

إيجاد المتجهات الذاتية

عند $\lambda = 0$

$$Ax = 0 \Rightarrow x = (0, y)$$

إذن المتجه الذاتي:

$$(0,1)$$

عند $\lambda = 1$

$$(A - I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

نحصل على

$$x = (1,1)$$

النتيجة

لدينا متجهان ذاتيان مستقلان خطيًا:

$$(0,1), \quad (1,1)$$

إذن يمكن قطرية المصفوفة، وتوجد قاعدة تجعل مصفوفة T على الشكل:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1 القيم الذاتية والمتجهات الذاتية والمعادلة المميزة

Eigenvalues, Eigenvectors and the Characteristic Equation

إذا كان V فضاءً متجهياً منتهي البعد على حقل F، وكان:

$$T : V \to V$$

تحويلًا خطيًا، فإننا نعرّف ما يلي:

أولاً: تعريف المتجه الذاتي (Eigenvector)

التعريف:

يسمى المتجه غير الصفري

$$v \in V$$

متجهًا ذاتيًا للتحويل الخطي T إذا وفقط إذا وُجد عدد قياسي $\lambda \in F$ بحيث:

$$T(v) = \lambda v$$

حيث:

- $v \neq 0$(صفري غير متجه)
- λ قياسي عدد

الخصائص الرياضية للمتجهات الذاتية

تمتلك المتجهات الذاتية العديد من الخصائص الرياضية التي تجعلها مفيدة بشكل خاص في التطبيقات المختلفة، إحدى الخصائص الأساسية هي أن المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية المميزة تكون مستقلة خطيًا. هذا يعني أنه إذا كانت المصفوفة تحتوي على قيم ذاتية متعددة، فإن المتجهات الذاتية المرتبطة بها ستمتد على مساحة متجهة يمكن استخدامها في العديد من التحويلات والتحليلات. بالإضافة إلى ذلك، يمكن قياس المتجهات الذاتية بواسطة أي عدد قياسي غير الصفر، وستظل ناقلات ذاتية صالحة لنفس القيمة الذاتية. تسمح هذه الخاصية بالمرونة في تطبيقها، خاصة في مشكلات التحسين حيث قد يكون القياس ضرورياً.

تطبيقات المتجهات الذاتية

لدى المتجهات الذاتية مجموعة واسعة من التطبيقات في مختلف المجالات. في التعلم الآلي، يتم استخدامها في خوارزميات مثل تحليل القيمة المفردة (SVD) والتحليل الدلالي الكامن (LSA)، والتي تساعد في استخراج أنماط ذات معنى من مجموعات البيانات الكبيرة. في معالجة الصور، يتم استخدام المتجهات الذاتية في تقنيات مثل الوجوه الذاتية للتعرف على الوجه، حيث تساعد في تحديد وتصنيف الوجوه بناءً على ميزاتها الفريدة. علاوة على ذلك، في الفيزياء والهندسة، تُستخدم المتجهات الذاتية في تحليل الأنظمة، مثل تحديد أنماط الاهتزاز في الهياكل الميكانيكية أو حل المعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة الديناميكية.

تعيين المتجهات الذاتية

مبرهنة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$ فإن القضايا الآتية متكافئة:

2 a قيمة ذاتية لـ A.

العدد λ قيمة ذاتية للمصفوفة A

الجملة المتجانسة:

$$(\lambda I - A)X = 0$$

لها حل غير صفري.

يوجد متجه غير صفري X بحيث:

$$AX = \lambda X$$

العدد λ حل للمعادلة المميزة:

$$det(\lambda I - A) = 0$$

تُقبل هذه المبرهنة بدون برهان.

ثانياً: تعريف القيمة الذاتية (Eigenvalue)

التعريف:

يسمى العدد القياسي $\lambda \in F$ قيمة ذاتية للتحويل الخطي T إذا وفقط إذا وُجد متجه غير صفري $v \in V$

بحيث:

$$T(v) = \lambda v$$

من التعريفين السابقين نلاحظ أن:

المتجه الذاتي يجب أن يكون غير صفري.

أما القيمة الذاتية λ فيمكن أن تكون صفرًا.

أي أن:

$$\lambda = 0$$

وفي هذه الحالة يكون:

$$T(v) = 0$$

أي أن المتجه الذاتي ينتمي إلى نواة التحويل (Kernel)

مثال

التحويل الخطي $T : R^2 \longrightarrow R^2$ المعرف بالصيغة :

$$T(x, y) = (-y, x)$$

ليس لديه متجهات ذاتية ولا قيم ذاتية، وذلك لأنه اذا كان

$$T(x, y) = \lambda(x, y)$$

فإن:

$$(-y, x) = \lambda(x, y)$$

اي :

$$\lambda x = -y$$

$$\lambda x = x$$

بالتعويض نحصل على المعادلتين:

$$(\lambda^2 + 1)x = 0_1(\lambda^2 + 1)y = 0$$

وبما ان $\lambda^2 + 1 \neq 0$ فعليه نحصل على

$$x = 0_1 y = 0$$

هذا يعني عدم وجود متجهات غير صفرية(x, y) تحقق

$$T(x, y) = \lambda(x, y)$$

المعادلة المميزة (Characteristic Equation)

لإيجاد القيم الذاتية، نحول العلاقة:

$$T(v) = \lambda v$$

إلى

$$(T - \lambda I)v = 0$$

ولكي يكون لهذا النظام حل غير صفري، يجب أن:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

وهذه تسمى المعادلة المميزة (Characteristic Equation)

- جذور المعادلة المميزة تمثل القيم الذاتية
- ولكل قيمة ذاتية نجد المتجهات الذاتية بحل:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

- القيم الذاتية والمتجهات الذاتية من أهم أدوات تحليل التحويلات الخطية
- تساعد في فهم سلوك المصفوفات والأنظمة الخطية
- تُستخدم في القطرية، وحل المعادلات التفاضلية، وتحليل البيانات

حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

يتم تحديد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المرتبطة بها بالاعتماد على مجموعة من المفاهيم الأساسية في الجبر الخطي، ويمكن إجراء هذه العمليات يدوياً باستخدام القوانين الرياضية المعروفة، أو بالاستعانة بالبرامج الحاسوبية المتخصصة مثل Mathematica في الحالات التي تتسم بدرجة عالية من التعقيد.

وينطبق هذا الإجراء على أي مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$، إلا أنه لأغراض التوضيح والتبسيط، غالباً ما يتم استخدام مصفوفات صغيرة يسهل التعامل معها عند الشرح والتطبيق.

كما تجدر الإشارة إلى أنه يتم استخدام الخط الغامق في النصوص الرياضية لتمييز المصفوفات عن باقي المتغيرات، وذلك لتفادي اللبس وتحقيق وضوح أكبر في العرض.

مراجعة الجبر الخطي

تُعد مفاهيم الجبر الخطي، مثل المصفوفات، المحددات، والفضاءات المتجهية، الأساس النظري الذي تقوم عليه عملية إيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، مما يجعل فهم هذه المفاهيم ضروريًا لاستيعاب هذا الموضوع بشكل صحيح.

عمليات المصفوفات الأساسية

تُعد عمليات المصفوفات الأساسية، مثل الجمع والطرح والضرب وإيجاد المحدد والمعكوس، من الركائز المهمة في الجبر الخطي، إذ تُستخدم بشكل مباشر في خطوات حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، مما يجعل الإلمام بها أمراً ضرورياً لفهم هذا الموضوع وتطبيقاته.

عمليات المصفوفات الأساسية

تُعرَّف المصفوفة A من الرتبة $m \times n$ بأنها ترتيب مستطيل من الأعداد (أو العناصر) موزعة في m صفوف أفقية و n أعمدة رأسية، بحيث يتم تنظيم هذه العناصر في صورة تسهل التعامل معها رياضياً.

ولتمثيل عناصر المصفوفة، يُستخدم الرمز aij للدلالة على العنصر الواقع في الصف i والعمود j، ويُعبَّر عن المصفوفة بالصيغة المختصرة:

$$A = [aij]$$

كما يُقال إن مصفوفتين من نفس الرتبة $m \times n$ ، مثل $A = [b_{ij}]$، متساويتان إذا وفقط إذا كانت جميع العناصر المتناظرة فيهما متساوية، أي:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{لكل} \ i, j$$

الخاتمة

في ختام هذا البحث، يتضح أن القيم الذاتية والمتجهات الذاتية تُعدّ من الركائز الأساسية في علم الجبر الخطي، لما لها من دور بارز في تحليل وتبسيط الأنظمة الخطية. وقد تناول البحث المفاهيم النظرية المرتبطة بهما، مع توضيح طرق إيجادهما باستخدام المعادلة المميزة، وبيان العلاقة الوثيقة بينهما وبين التحويلات الخطية والمصفوفات.

كما أظهر البحث أن لهذه المفاهيم أهمية كبيرة في تحويل المصفوفات إلى صورة قطرية، مما يسهم في تسهيل العمليات الحسابية وحل العديد من المشكلات الرياضية، خاصة في الأنظمة الخطية والمعادلات التفاضلية، ولم يقتصر دور القيم الذاتية والمتجهات الذاتية على الجانب النظري فقط، بل يمتد إلى تطبيقات عملية واسعة في مجالات متعددة مثل الفيزياء، والهندسة، وعلوم الحاسوب، وتحليل البيانات.

ومن خلال ما تم عرضه، يمكن التأكيد على أن فهم القيم الذاتية والمتجهات الذاتية يُعدّ خطوة أساسية لفهم أعمق للأنظمة الرياضية المعقدة، كما يسهم في تطوير أساليب فعّالة لمعالجة المشكلات التطبيقية.

ويوصي البحث بضرورة التوسع في دراسة التطبيقات الحديثة لهذه المفاهيم، خاصة في مجالات الذكاء الاصطناعي وتحليل البيانات، لما لها من أهمية متزايدة في ظل التطور التكنولوجي المتسارع.

المراجع

1. السبتي، جورج ضايف، الجبر الخطي، دار الحكمة، كلية العلوم، جامعة البصرة،1988.
2. جديد، ميسم أحمد، رياضيات(1)، منشورات جامعة الإمام الأعظم، كلية الهندسة المعلوماتية، 2019− 2020.
3. يونس، المبروك علي، والأحمر، محمد علي، أساسيات الجبر الخطي، ط1، طرابلس: دار الكتاب الجديدة المتحدة،2002.
4. قاسم، علي حسين، المصفوفات والجبر الخطي للعلوم الهندسية، جامعة بغداد، كلية العلوم، العراق،2019.
5. Introduction to Linear Algebra (2016). *Introduction to Linear Algebra* (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
6. Elementary Linear Algebra (2019). *Elementary Linear Algebra* (12th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

7. Linear Algebra Done Right (2015). *Linear Algebra Done Right* (3rd ed.). Cham: Springer.
8. Alnnale, T. (2026). From Reactive to Proactive Governance: A Hybrid LSTM–Gradient Boosting Architecture for Real-Time Anomaly Signal Detection in Multi-Store Retail Supply Chain Decision Systems. Al-Farooq Journal of Sciences, 2(1), 987-1005.